



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

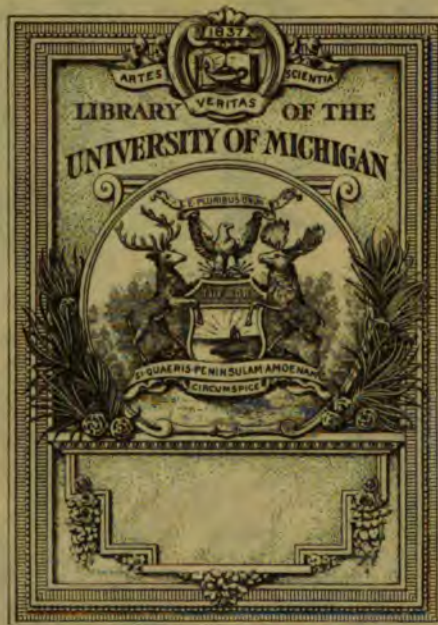
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

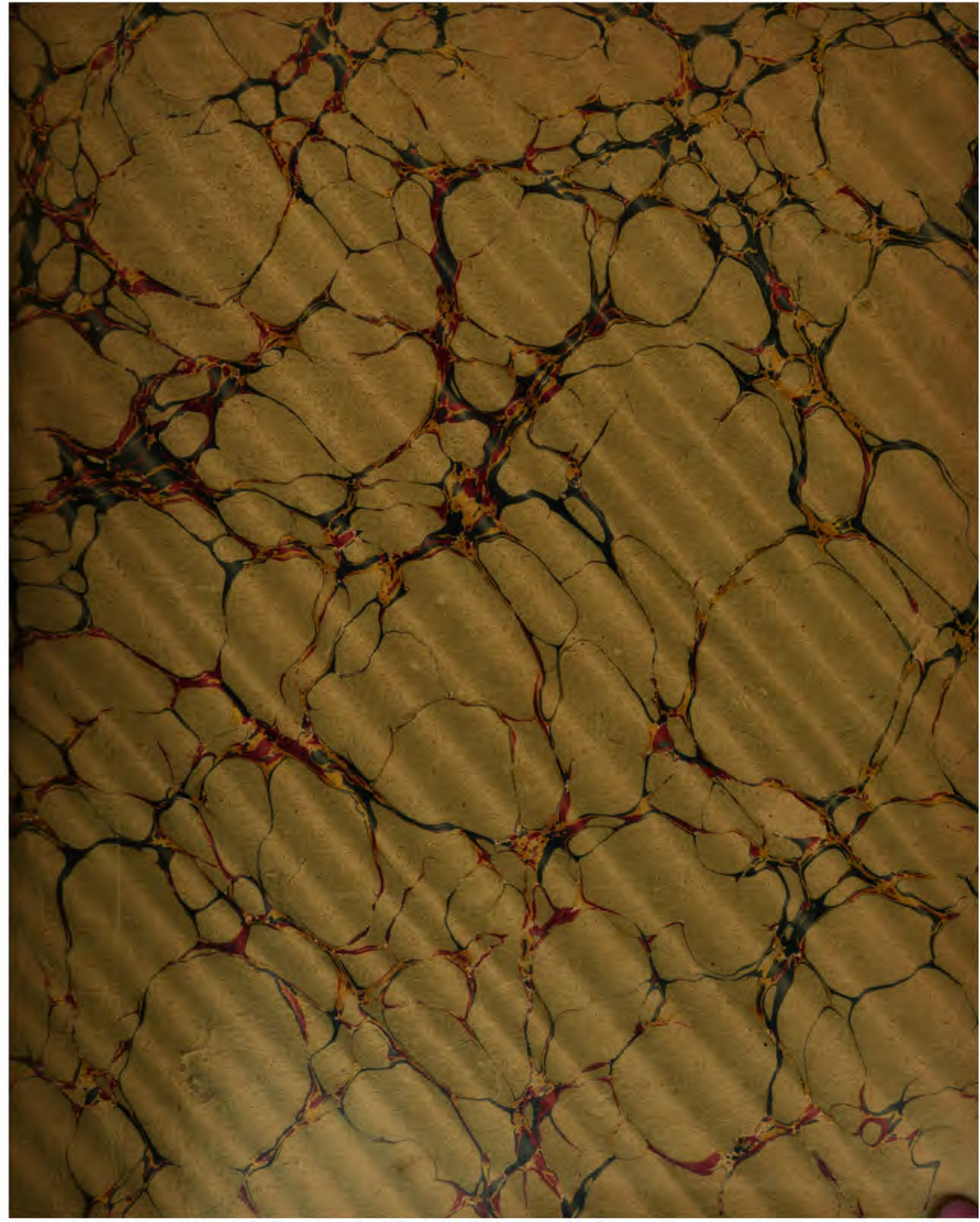
STORAGE

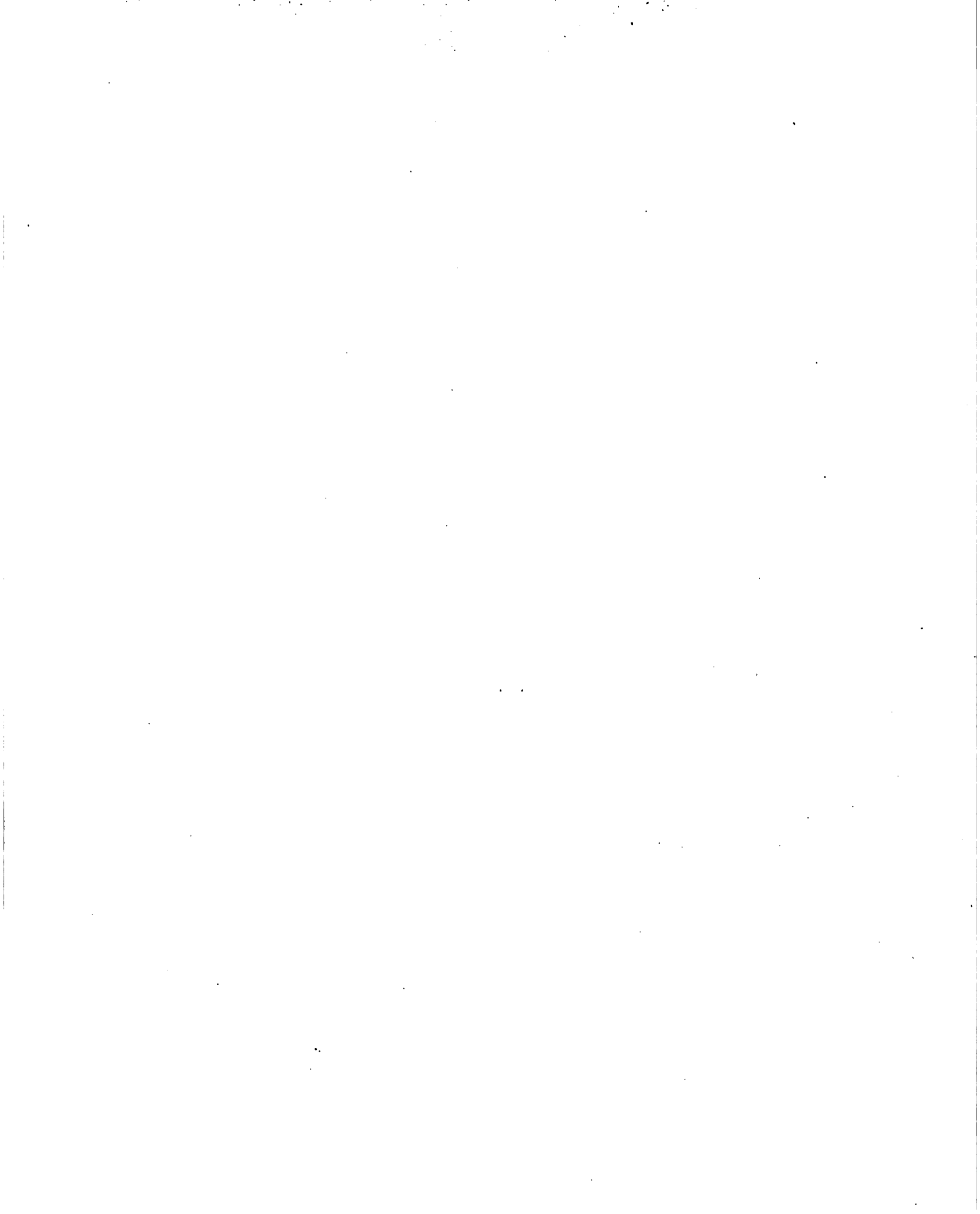
C2W5

B 504780



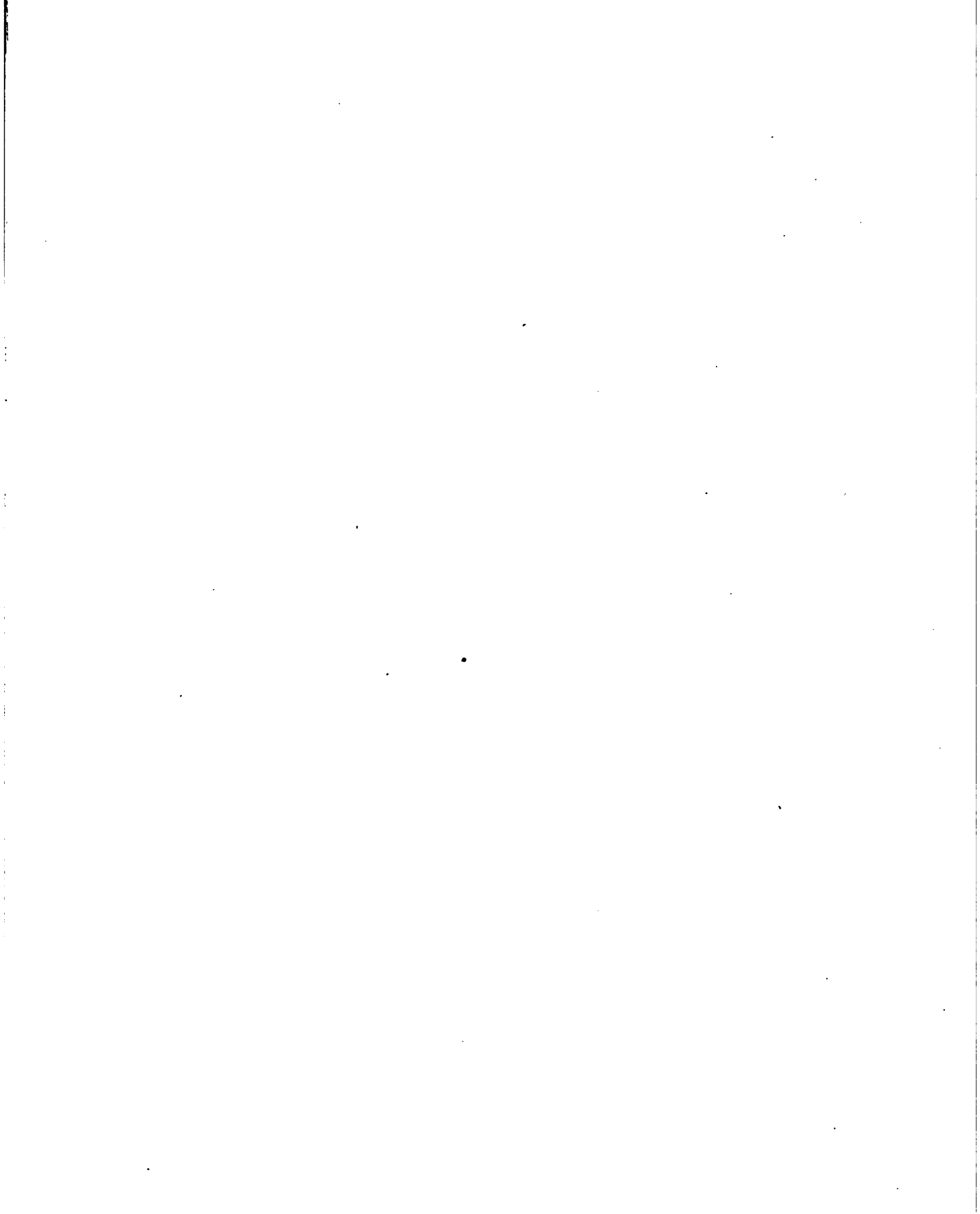






Atton
obs.

QB
378
.H5
S59



N° D'ORDRE :

916.

THÈSES

82200

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR (M) M.^r SIMONIN,

Ancien élève de l'École Normale supérieure, Agrégé des Sciences mathématiques,
Astronome à l'Observatoire de Nice.

1^{re} THÈSE. — SUR L'ORBITE DE (106) HÉCUBE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 mars 1897, devant la Commission d'examen.

MM POINCARÉ, *Président.*

WOLF,

ANDOYER,

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, Professeur.....	Géométrie supérieure.
	DE LACAZE-DUTHIERS.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
PROFESSEURS	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER... ..	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie physique.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	CHATIN.....	Zoologie. Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	JOLY.....	Chimie.
	PELLAT.....	Physique.
	PAINLEVÉ.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRETARE	FOUSSEREAU.	

2-21-38

A

MES PARENTS.

Témoignage de piété filiale,
M. SIMONIN.



PREMIÈRE THÈSE.

SUR L'ORBITE DE ⁽¹⁰⁸⁾ HÉCUBE.

INTRODUCTION.

La planète ⁽¹⁰⁸⁾ Hécube, qui a été découverte à Düsseldorf, le 2 avril 1869, par M. Luther, a tout de suite attiré l'attention des astronomes et des géomètres, en raison de cette particularité que son moyen mouvement est très voisin du double de celui de Jupiter.

On sait, en effet, que, dans ce cas, les équations qui définissent les éléments de l'orbite, la longitude moyenne en particulier, contiennent des petits diviseurs et que les variations de ces éléments sont considérablement plus grandes que dans le cas général.

A l'aide des premières observations d'Hécube, M. Schulhof a calculé les éléments osculateurs de son orbite et, depuis lors, les a fréquemment corrigés, grâce aux observations régulières qui ont été faites, et qui nous ont fourni à nous-même les positions de cet astre à 14 oppositions différentes, comprises entre les années 1869 et 1895. On trouvera plus loin le Tableau de tous les systèmes d'éléments osculateurs de cet astronome : les diverses valeurs du moyen mouvement diffèrent entre elles de plusieurs dixièmes de seconde d'arc, la longitude du périhélie diminue constamment d'une façon notable, tandis que l'excentricité augmente.

Hécube est aussi, parmi les astéroïdes dont le moyen mouvement est voisin du double de celui de Jupiter, l'un de ceux pour lesquels la commensurabilité est la plus approchée; c'est, par suite, dans la théorie d'Hécube qu'on doit rencontrer les plus grandes perturbations.

Enfin, l'étude des planètes telles qu'Hécube présente plus de difficultés que celle des planètes dont le moyen mouvement est à peu près 3, 4, ... fois celui de Jupiter, puisque, dans le premier cas, les termes les plus importants de la fonction perturbatrice, qui introduisent des petits diviseurs, contiennent à la première puissance l'excentricité de l'orbite d'une des deux planètes (Hécube

ou Jupiter), tandis que, dans le second cas, les plus petits exposants de ces excentricités sont respectivement égaux à 2, 3,

Pour toutes ces raisons, c'est plus particulièrement d'Hécube que se sont occupés les auteurs des *Mémoires* relatifs au cas d'une commensurabilité approchée des moyens mouvements.

Nous citerons, en premier lieu, les travaux de M. Gylden, publiés dans divers *Suppléments aux Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Suède*. Ils ont servi de point de départ à M. Harzer dans ses recherches sur cette planète. Ces divers *Mémoires* ont été analysés dans le *Bulletin astronomique* (t. VII, p. 470 et suiv.) par M. Callandreau, qui a été amené à étudier, en même temps, les recherches relatives aux méthodes de M. Gylden, effectuées par MM. Andoyer, Backlund, Brendel, Masal, Olsson et Wolf.

Pour cette raison nous pouvons nous borner à indiquer, en quelques mots, les caractères généraux du *Mémoire* de M. Harzer (1).

Après avoir constaté, dès le début, que si l'on prenait comme première approximation une ellipse képlérienne, les approximations, ordonnées suivant les puissances de la masse de Jupiter, formeraient une suite divergente, M. Harzer est conduit à considérer une orbite intermédiaire, obtenue en prenant dans la fonction perturbatrice les termes à longue période les plus importants. La lecture de ses intéressantes recherches montre bien toutes les difficultés du problème.

En ce qui concerne les termes séculaires, M. Harzer, appliquant en cela les méthodes de M. Gylden, met un soin tout particulier à les faire disparaître, et il parvient à les éviter complètement.

Il importe aussi de discerner les termes périodiques qu'on peut négliger, ceux qu'on peut intégrer sans crainte d'avoir des développements divergents, enfin les termes à longue période que l'on ne doit pas intégrer de suite. La détermination de ceux-ci nécessite l'introduction des fonctions elliptiques, et donne lieu à des calculs longs et pénibles, qui conduisent à l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés. De plus, si l'on n'effectue pas les calculs numériques, il est difficile de se rendre un compte exact des choix faits par l'auteur qui conserve ou néglige certains termes, suivant l'importance de leurs coefficients ou la période de leurs arguments; ceci tient à la nature de la question elle-même et non à la méthode employée; nous rencontrerons plus loin les mêmes difficultés.

Pour traiter un problème aussi compliqué, on conçoit dès lors combien il est utile d'employer des méthodes différentes; c'est ainsi que M. Tisserand s'est

(1) P. HARZER, *Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper* (*Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, VII^e série, t. XXXIV, n^o 12).

occupé du même sujet dans plusieurs études publiées dans les *Comptes rendus* ou dans le *Bulletin astronomique*.

Dans un premier Travail (1), M. Tisserand, considérant le cas d'une commensurabilité approchée, se sert des formules de Laplace dans lesquelles il néglige les excentricités et les inclinaisons; il arrive à la conclusion suivante, qu'il importe de rapprocher des résultats obtenus plus tard par M. Poincaré, à l'aide d'une méthode entièrement différente :

« Alors même que l'excentricité propre e_0 serait nulle, il y aura une excentricité e , produite par les perturbations et un périhélie ϖ, \dots ; on voit que les longitudes variables ϖ , (de la planète troublée) et ϖ' , (Jupiter) différeront constamment de 180° .

» Remarquons enfin que, quand les deux planètes P (troublée) et P' (troublante) seront en conjonction, P sera voisine de son périhélie ϖ , et P' de son aphélie ϖ' . »

Et plus loin, à propos d'une application numérique à la planète (153) Hilda, dont le moyen mouvement est environ les $\frac{2}{3}$ de celui de Jupiter, M. Tisserand trouve :

« $e_1 = 0,111$, quantité tout à fait comparable à l'excentricité $e = 0,172$ de l'ellipse osculatrice. »

Et il ajoute :

« On voit donc que l'excentricité produite par les perturbations est ici considérable et peut, à un moment donné, être beaucoup plus grande que l'excentricité e_0 indépendante des perturbations. »

Dans un second Mémoire (2), M. Tisserand expose une méthode nouvelle pour calculer les éléments d'une planète du type d'Hécube; il part des équations du mouvement qui ont servi à Delaunay dans sa *Théorie de la Lune*; mais ici l'existence des petits diviseurs nécessite l'emploi des fonctions elliptiques dans les calculs; ceux-ci ont été développés par M. Tisserand dans le t. XII du *Bulletin astronomique* et dans le t. IV de son *Traité de Mécanique céleste*.

C'est dans ce second Mémoire que, pour la première fois, se trouvent des perturbations proportionnelles à la racine carrée de la masse de Jupiter et non plus à la masse elle-même. On est encore frappé ici de la concordance des résultats

(1) *Bulletin astronomique*, t. III, p. 425.

(2) *Bulletin astronomique*, t. IV, p. 183.

obtenus par MM. Poincaré et Tisserand, au moyen de deux méthodes tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

Il convient aussi de signaler cette remarque faite par M. Tisserand dans ses recherches sur la libration des petites planètes, à savoir que : dans certains cas, si, par l'effet des perturbations, les moyens mouvements peuvent être exactement commensurables à un moment donné, les formules subsistent encore, et il ne résulte, de cette circonstance, aucune instabilité dans l'orbite de la planète.

M. Harzer était arrivé, de son côté, aux mêmes conclusions, à l'aide de ses formules; les nôtres, quoique bien différentes, s'appliquent également à ce cas sans aucun changement.

Plus récemment encore, M. Callandreau (1) a, pour l'étude du cas d'une commensurabilité approchée, utilisé les méthodes d'approximation de Laplace relatives aux inégalités séculaires des planètes, en se proposant surtout d'obtenir une explication théorique de la lacune des astéroïdes, là où leur moyen mouvement serait à peu près le double de celui de Jupiter.

Certains résultats auxquels est parvenu l'auteur (voir p. 94) peuvent utilement être rapprochés des remarques que nous faisons plus loin sur les variations de l'éclat des planètes analogues à Hécube. Des autres conclusions de ce Mémoire, retenons encore la suivante : dans le cas d'Hécube, il n'y a pas de libration; nous le montrerons aussi dans la suite.

Poursuivant l'examen rapide des diverses recherches sur le même sujet, nous arrivons enfin aux travaux de M. Poincaré : ce sont d'abord son Mémoire couronné (2), ensuite les deux premiers tomes de l'Ouvrage (3) où il expose en détail les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

Ce sont ces méthodes nouvelles, à propos desquelles M. Poincaré est amené à citer le cas d'Hécube, qui nous ont conduit aux formules obtenues dans le Mémoire actuel.

La multiplicité des travaux dont nous venons de faire l'énumération succincte montre assez que le problème du mouvement d'Hécube ne peut être traité par les procédés ordinaires, si on ne leur fait subir, au préalable, d'importantes modifications. Il a semblé à M. Tisserand que l'étude complète des méthodes employées et des résultats obtenus par les divers géomètres qui se sont occupés de cette question, devait conduire à une solution simple qui n'entraînât pas avec elle le recours aux fonctions elliptiques.

C'est ce problème que M. Tisserand a bien voulu nous proposer de résoudre. Tel est le but de ce Travail.

(1) CALLANDEAU, *Sur quelques cas de commensurabilité...* (*Annales de l'Observ. de Paris*, t. XXII).

(2) POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* (*Acta math.*, t. XIII).

(3) POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

L'étude de ces divers Membres, et surtout les conseils de MM. Poincaré et Tisserand, nous ont conduit aux résultats donnés plus loin. En outre, dans ces recherches, faites à l'Observatoire de M. Bischoffsheim, M. Perrotin nous a fait largement profiter de l'expérience qu'il a depuis longtemps acquise dans toutes les questions concernant les astéroïdes.

Nous prions ces maîtres bienveillants d'agréer nos respectueux remerciements.

Le Mémoire actuel est divisé en trois Chapitres :

Dans le premier, on établit les formules nécessaires au calcul des éléments et à la détermination exacte des constantes d'intégration, lorsqu'on en connaît une valeur approchée. Comme nous l'avons déjà dit, la plus grande difficulté qu'on y rencontre, consiste dans le choix des termes qu'il faut conserver ou négliger dans les approximations.

Le second est consacré aux calculs numériques. On y trouve, en premier lieu, les méthodes employées successivement pour déterminer les constantes d'intégration, en second lieu, les données qui permettent d'effectuer tous les calculs et enfin les expressions numériques des éléments de l'orbite et les résultats de la comparaison de la théorie aux observations.

Le troisième Chapitre comprend les valeurs des éléments osculateurs pour des époques éloignées et la comparaison de certains résultats de M. Harzer avec ceux que fournissent nos formules.



CHAPITRE PREMIER.

1. UTILITÉ DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES. — Dans le cas général, pour étudier l'orbite d'une planète, on considère, dans la fonction perturbatrice où la plupart des éléments sont pris, dans une première approximation, avec leur valeur elliptique, tous les termes jusqu'à une certaine puissance des excentricités et des inclinaisons, et l'on réserve pour un calcul spécial les termes qui introduisent des inégalités à longue période. C'est ainsi, par exemple, que Le Verrier a donné à part l'ensemble des termes dépendant de cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter (1). De même, dans sa *Théorie de Vesta*, M. Perrotin (2) a traité séparément les termes du second ordre par rapport aux masses qui contiennent l'argument

$$2l'' + 9l' - 3l,$$

où l'' , l' et l sont les longitudes moyennes respectives de Saturne, de Jupiter et de Vesta. Dans le cas d'Hécube, le même procédé, comme nous l'avons déjà dit, ne serait plus légitime; le développement des coordonnées, par rapport aux puissances des masses, n'est plus possible comme dans les cas cités plus haut; nous allons donc recourir à une autre méthode.

Si l'on remarque, avec M. Poincaré, qu'en négligeant d'abord la masse de Jupiter ainsi que les excentricités et les inclinaisons des orbites, Hécube et Jupiter décrivent autour du Soleil deux circonférences avec les vitesses angulaires qu'on peut désigner par n et n' , on voit que, après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2\pi}{n-n'}$, ces deux planètes se retrouvent dans la même position relative par rapport au Soleil. Si l'on rapporte le système à des axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire n' , les coordonnées d'Hécube sont des fonctions périodiques du temps; la période est $\frac{2\pi}{n-n'}$. Le problème ainsi simplifié comporte une infinité de solutions périodiques. Ces solutions, dans lesquelles l'excentricité est très petite, sont appelées par l'auteur : *solutions périodiques de la première sorte*.

M. Poincaré a, en outre, démontré (3) que le problème des trois corps com-

(1) LE VERRIER, *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. X, p. 52.

(2) PERROTIN, *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. I, p. B.80.

(3) POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles...*, t. I, p. 97.

porte encore des solutions périodiques de la première sorte, si la masse de Jupiter est assez petite, pourvu que n et n' ne soient pas commensurables. Considérons l'une d'entre elles, prenons pour origine du temps l'époque d'une conjonction d'Hécube et de Jupiter; les coordonnées d'Hécube, rapportées à des axes mobiles comme plus haut, sont des fonctions périodiques du temps, et la vitesse de cet astéroïde est, à l'origine du temps, normale à son rayon vecteur.

M. Poincaré recommande, surtout pour le cas particulier qui nous occupe ici, (voir *Les Méthodes nouvelles ...*, t. I, p. 153), l'usage de ces solutions périodiques, quoique les conditions initiales du mouvement ne soient pas exactement celles qui correspondent à une solution périodique; mais, si elles diffèrent peu de la réalité, la grande inégalité, provenant de ce que $n - 2n'$ est petit par rapport à n et n' , introduit des grands coefficients qui varient peu si l'on passe des conditions véritables du mouvement à celles qui correspondent à une solution périodique; il est donc avantageux de déterminer ainsi la valeur approchée de ces grands coefficients.

En outre, si l'on peut choisir, comme première approximation, une solution assez voisine de l'orbite réelle, la différence entre les coordonnées calculées et réelles d'Hécube peut rester assez petite pour qu'on puisse, pendant assez longtemps, négliger le carré de cette différence. C'est à ce propos que M. Poincaré introduit les équations qu'il appelle *équations aux variations*. On verra plus loin avec quelle approximation on peut ainsi représenter les diverses positions d'Hécube, et quelle modification on peut apporter à ces méthodes pour obtenir des résultats plus exacts.

Mais, tout d'abord, rendons-nous compte de ce fait, qu'il existe des solutions périodiques voisines de l'orbite d'Hécube, c'est-à-dire qu'il arrive un moment où les deux planètes, troublée et troublante, sont en conjonction en même temps que la seconde passe à très peu près au périhélie.

Si, au moment d'une conjonction, Hécube est loin de son périhélie, à la conjonction suivante sa longitude a augmenté de $\frac{2\pi n}{n-n'}$, ou, si l'on veut, a diminué de $2\pi \frac{n-2n'}{n-n'}$. Pour simplifier les calculs, supposons $n - 2n' = 20''$ et $n - n' = 300''$, on voit qu'à deux conjonctions consécutives correspondent pour Hécube deux longitudes différant de $24''$; on pourra donc toujours choisir l'origine du temps de façon qu'Hécube et Jupiter soient en conjonction et que la première soit à moins de 12° de son périhélie. Le phénomène se reproduit périodiquement après 15 oppositions.

D'après les éléments de M. Schulhof, la longitude du périhélie d'Hécube varie de 174° à 168° à peu près dans l'intervalle de 1869 à 1895; un calcul

simple montre que cette planète est au voisinage de son périhélie et en conjonction avec Jupiter vers le mois de septembre 1897 (1).

Dans ces conditions, nous allons chercher toutes les solutions périodiques voisines du mouvement d'Hécube, en ne prenant dans la fonction perturbatrice que les termes à longue période les plus importants; ensuite nous choisirons la solution qui servira de point de départ, nous formerons les équations aux variations et enfin nous tiendrons compte de quelques termes supplémentaires. Dans ces calculs, nous n'avons tout d'abord considéré que les termes du premier ordre par rapport à la masse; c'est après nous être rendu compte des résultats de cette approximation que nous ne nous sommes plus borné à ces seuls termes, ni astreint aux développements suivant les puissances de la masse de Jupiter. Nous allons transcrire successivement les formules qui proviennent de ces deux approximations; si l'exposition de nos calculs est ainsi un peu plus longue, nous osons espérer qu'elle y gagnera en clarté,

2. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — Désignons, suivant l'habitude, par a, e, i, l, g et h , respectivement le demi grand axe, l'excentricité, l'inclinaison de l'orbite, l'anomalie moyenne, la distance du nœud ascendant au périhélie et la longitude du nœud, relatifs à Hécube; les mêmes lettres accentuées correspondent aux divers éléments de l'orbite de Jupiter, dont nous désignons la masse par m' ; la masse d'Hécube est négligée; celle du Soleil est prise pour unité.

Posons, en outre,

$$(1) \quad L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad H = G \cos i, \quad \gamma = \sin \frac{i}{2}.$$

Les équations qui définissent le mouvement d'Hécube en fonction du temps t peuvent se mettre sous la forme suivante, bien connue :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dL}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H}. \end{array} \right.$$

Nous ne prenons d'abord, dans la fonction perturbatrice R , que les termes constants ou à longue période, en négligeant ceux qui contiennent e à une puis-

(1) Notons qu'à cette époque Jupiter est, au contraire, au voisinage de son aphélie (21° environ), ce qui concorde avec les résultats de M. Tisserand énoncés plus haut.

sance supérieure à 2, ou e' à une puissance supérieure à 1; nous négligeons de même $\gamma\gamma'$, γ'^2 et γ^4 . R est alors donné par l'expression suivante :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{1}{2a} + M_0 + M_1 e^2 - M_2 e \cos(l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\ &+ M_3 e^2 \cos 2(l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') + M_4 e' \cos(l + g + h - 2l' - g' - h') \\ &- M_5 e e' \cos(2l + 3g + 3h - 4l' - 3g' - 3h') + M_6 e e' \cos(g + h - g' - h') \\ &- M_7 \gamma^2 + M_8 \gamma^2 \cos(2l + 2g + 4h - 4l' - 4g' - 4h'). \end{aligned} \right.$$

Les divers coefficients M_0, M_1, \dots, M_8 ont les valeurs ci-dessous; les notations adoptées sont celles de Le Verrier et de M. Tisserand :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} M_0 &= \frac{m'}{2} A^{(0)}, & M_3 &= \frac{m'}{4} (22A^{(4)} + 7A_1^{(4)} + A_2^{(4)}), & M_6 &= \frac{m'}{2} (A^{(1)} - A_1^{(1)} - A_2^{(1)}), \\ M_1 &= \frac{m'}{4} (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}), & M_4 &= \frac{m'}{2} \left(3A^{(1)} + A_1^{(1)} - 4\frac{a}{a^2} \right), & M_7 &= \frac{m'}{2} B^{(1)}, \\ M_2 &= \frac{m'}{2} (4A^{(2)} + A_1^{(2)}), & M_5 &= \frac{m'}{2} (21A^{(3)} + 7A_1^{(3)} + A_2^{(3)}), & M_8 &= \frac{m'}{2} B^{(3)}. \end{aligned} \right.$$

On peut vérifier ces coefficients en remplaçant dans le développement de la fonction perturbatrice donné par Le Verrier (1) ou par M. Tisserand (2), $\lambda - \omega$, $l' - \omega'$, ω , ω' , τ' et η respectivement par l , l' , $g + h$, $g' + h$, h' et γ .

Notons que, dans l'expression (3) de R, la constante de Gauss est supposée égale à l'unité; on voit aisément que cela revient à changer l'unité de longueur et qu'on passe du système ordinaire au système actuel en augmentant de 1,176279 les logarithmes des longueurs a et a' .

3. ÉTUDE DU PROBLÈME RESTREINT. — Pour intégrer les équations (2), négligeons d'abord dans l'expression (3) de R les termes qui contiennent l'un des deux facteurs e' ou γ ; c'est là ce qu'on appelle souvent le *problème restreint*; nous obtenons le nouveau système d'équations

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial G}, \\ R_1 &= \frac{1}{2a} + M_0 + M_1 e^2 - M_2 e \cos(l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h') \\ &+ M_3 e^2 \cos 2(l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h'); \end{aligned} \right.$$

(1) LE VERRIER, *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. I, ou t. X, p. 40 et suiv.

(2) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 309.

comme on néglige γ , H est égal à G , et h est une constante arbitraire. R_1 ne contient que l'argument $l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h'$ et le double de cet argument; nous allons donc pouvoir appliquer à l'intégration du système (5) la méthode qui a servi à Delaunay dans sa *Théorie de la Lune*.

(A). *Calcul de L et de G.* — Tout d'abord on voit que :

$$\frac{\partial R_1}{\partial g} = 2 \frac{\partial R_1}{\partial l};$$

par suite, une première intégrale des équations (5) est :

$$(6) \quad 2L - G = G_0,$$

où G_0 est une constante arbitraire.

Des équations (1) et (6), on obtient aisément les expressions suivantes de L et de G en fonction de G_0 et de e , en négligeant les puissances de e supérieures à 2 :

$$(7) \quad \begin{cases} L = G_0 \left(1 - \frac{e^2}{2} \right), \\ G = G_0 (1 - e^2). \end{cases}$$

(B). *Calcul de e et de $l + 2g + 2h$.* — Si l'on pose

$$(8) \quad \theta = l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h',$$

les équations (5), (7) et (8) donnent, après des réductions faciles, les expressions suivantes de $\frac{de}{dt}$ et de $\frac{d\theta}{dt}$:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{de}{dt} = -\frac{M_2}{G_0} \sin \theta + 2 \frac{M_3}{G_0} e \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = -2L \left(-\frac{1}{2a^2} + M'_0 + M'_1 e^2 - M'_2 e \cos \theta + M'_3 e^2 \cos 2\theta \right) \\ \quad + \frac{1+e^2}{G_0 e^2} (2M_1 e - M_2 \cos \theta + 2M_3 e \cos 2\theta) - 2n. \end{cases}$$

Dans les équations précédentes, M'_i désigne la dérivée de M_i par rapport à a . Dans les équations (9), remplaçons a par $G_0^2(1 - e^2)$ et toute fonction $f(a)$ par $f(G_0^2) - G_0^2 e^2 f'(G_0^2)$. Comme il n'y a aucune confusion à craindre, nous conserverons dans la suite les mêmes lettres M_i , M'_i pour désigner des fonctions



de G_0^2 et non plus de α . Nous remplaçons ainsi le système (9) par le système équivalent (10) :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{de}{dt} = \left(G_0 M_2' e^2 - \frac{M_2}{G_0} \right) \sin \theta + 2 \frac{M_2}{G_0} e \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{G_0^3} - 2 G_0 M_0' + \frac{2 M_1}{G_0} - 2 n' + e^2 \left(\frac{3}{2 G_0^3} + G_0 M_0' + 2 G_0^2 M_0' + \frac{M_1}{G_0} - 4 G_0 M_1' \right) \\ \quad + \left(3 G_0 M_2' e - \frac{M_2}{2 G_0} e - \frac{M_2}{G_0} \right) \cos \theta + \left(\frac{2 M_3}{G_0} + \frac{M_3}{G_0} e^2 - 4 G_0 M_3' e^2 \right) \cos 2\theta. \end{array} \right.$$

Delaunay a montré que les valeurs de e et de θ pouvaient se mettre sous la forme

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin \theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \dots, \\ e = e_0 + e_1 \cos \theta_0(t+c) + e_2 \cos 2\theta_0(t+c) + e_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \dots, \end{array} \right.$$

où $\theta_0, \theta_1, \dots, e_1, e_2, \dots$ sont des fonctions de G_0 et de e_0 .

Si l'on identifie les équations (10) et (11), en négligeant e_0^3 et les produits de m' par l'un des coefficients $e_1, e_2, \dots, \theta_0, \theta_1, \dots$, on voit que dans le second membre de la première équation (10), il faut remplacer e simplement par e_0 ; il est donc inutile de tenir compte, dans l'expression de e , du terme

$$e_3 \cos 3\theta_0(t+c);$$

ceci provient de ce que, dans le développement de la fonction perturbatrice, le terme en $e^3 \cos 3\theta$ a été négligé. De même, dans l'expression de θ , les trois premiers termes sont les seuls dont nous ayons besoin, et, dans les seconds membres des équations (10), il suffit de remplacer θ par $\theta_0(t+c)$.

Des calculs simples donnent, pour $\theta_0, \theta_1, \theta_2, e_1$ et e_2 , les expressions suivantes :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \frac{1}{G_0^3} - 2 G_0 M_0' + \frac{2 M_1}{G_0} - 2 n' + e_0^2 \left(\frac{3}{2 G_0^3} + G_0 M_0' + 2 G_0^2 M_0' + \frac{M_1}{G_0} - 4 G_0 M_1' \right), \\ \theta_0 \theta_1 = \frac{3 e_0 e_1}{G_0^3} + 3 G_0 M_2' e_0 - \frac{M_2}{2 G_0} e_0 - \frac{M_2}{G_0} e_0, \\ 2 \theta_0 \theta_2 = \frac{3 e_0 e_2}{G_0^3} - 4 G_0 M_3' e_0^2 + \frac{2 M_3}{G_0} + \frac{M_3}{G_0} e_0^2, \\ \theta_0 e_1 = \frac{M_2}{G_0} - G_0 M_2' e_0^2, \\ 2 \theta_0 e_2 = - \frac{2 M_3}{G_0} e_0. \end{array} \right.$$

(C). *Calcul de g.* — Pour intégrer le système (5), il nous reste à déterminer g . L'équation qui définit cette quantité peut, toutes réductions faites, se mettre sous la forme :

$$(13) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{G}{L^2 e} (2M_1 e - M_2 \cos \theta + 2M_3 e \cos 2\theta).$$

Si nous opérons, pour l'équation (13), comme nous l'avons fait pour le système (9), nous la remplaçons par la suivante :

$$(14) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{2M_1}{G_0} - 2G_0 M'_1 e_0^2 - \left(\frac{M_2}{G_0 e} - G_0 M'_2 e \right) \cos \theta + \left(\frac{2M_3}{G_0} - 2G_0 M'_3 e_0^2 \right) \cos 2\theta.$$

Posons encore, comme l'a fait Delaunay,

$$(15) \quad g = g_m + g_0(t+c) + g_1 \sin \theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + g_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \dots$$

Une identification facile nous donne les valeurs suivantes de g_0 , g_1 , g_2 (dans cette première approximation, g_3 est nul de même que θ_3).

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_0 = \frac{2M_1}{G_0} - 2G_0 M'_1 e_0^2, \\ \theta_0 g_1 = G_0 M'_2 e_0 - \frac{M_2}{G_0 e_0}, \\ 2\theta_0 g_2 = \frac{2M_3}{G_0} - 2G_0 M'_3 e_0^2. \end{array} \right.$$

Les équations (7), (8), (11), (12), (15) et (16) donnent les quatre éléments L , G , θ , g ou L , G , l , g en fonction du temps t et des quatre constantes arbitraires G_0 , e_0 , g_m , c .

Mais avant d'aller plus loin, cherchons à nous rendre compte des résultats de nos identifications. Nous voyons, en premier lieu, que θ_0 , θ_2 , e_1 , g_0 et g_2 sont des fonctions paires de e_0 , tandis que e_2 , θ_1 et g_1 en sont des fonctions impaires; de plus, θ_1 et g_1 contiennent le même terme en $\frac{1}{e_0}$; en outre, au degré d'approximation de nos calculs, c'est-à-dire si l'on néglige e_0^3 , on a les relations

$$\begin{aligned} e_1 + e_0 g_1 &= 0, \\ e_2 + e_0 g_2 &= 0. \end{aligned}$$

En second lieu, on remarque que la partie de θ_0 , indépendante de e_0 , est à très

peu près,

$$\frac{1}{G_0^2} - 2n', \text{ ou } n - 2n';$$

c'est-à-dire que θ_0 est le petit diviseur dont nous avons déjà parlé.

Enfin, si, avec une valeur approchée de G_0 ou de n , on calcule e_1 , on trouve que cette quantité est assez comparable à l'excentricité de l'orbite d'un astéroïde (environ 0,03); si l'on considère, en général, $\frac{M_t}{\theta_0 G_0}$ comme étant de l'ordre des excentricités, on voit que e_2 est une quantité du second ordre. Quant à θ_1 , sa partie principale est

$$\frac{3e_0 e_1}{\theta_0 G_0^2}, \text{ ou encore } \frac{3e_0 e_1}{\frac{n - 2n'}{n}};$$

si nous supposons, comme plus haut, $n - 2n' = 20''$, $n - n' = 300''$ et $e_1 = 0,03$, on trouve que dans θ_1 , le coefficient de e_0 est supérieur à l'unité, bien qu'il contienne m' en facteur.

Jusqu'alors nous ne nous sommes pas occupé des termes de θ_0 , θ_1 , ... qui ont le facteur e_0^2 ; pour cela, servons-nous des remarques faites plus haut, et posons

$$(17) \quad \begin{cases} \theta_0 = \theta_{00} + \theta_{01} e_0^2, & g_0 = g_{00} + g_{01} e_0^2, & e_1 = e_{11} + e_{12} e_0^2, \\ \theta_1 = \theta_{11} e_0 + \frac{\theta_{12}}{e_0}, & g_1 = g_{11} e_0 + \frac{g_{12}}{e_0}, & e_2 = e_{21} e_0 + \frac{e_{22}}{e_0}. \\ \theta_2 = \theta_{21} + \theta_{22} e_0^2, & g_2 = g_{21} + g_{22} e_0^2, & \end{cases}$$

Si, dans les équations (12) et (16), nous tenons compte des relations (17), nous obtenons immédiatement les résultats approchés qui suivent :

$$\theta_{01} = \frac{3}{2G_0^2};$$

θ_{01} est indépendant de m' ;

$$(18) \quad \begin{cases} \theta_{12} = g_{12} = -e_{11}, \\ \theta_{21} = g_{21} = -e_{21}; \end{cases}$$

et enfin

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{22} = 0, \\ e_{11} = \frac{M_1}{\theta_0 G_0}, \\ e_{12} = -\frac{3M_2}{2\theta_0^2 G_0^2}, \\ \theta_{11} = -\frac{9M_2}{2\theta_0^2 G_0^2}, \\ \theta_{22} = -\frac{3M_2}{\theta_0^2 G_0^2}. \end{array} \right.$$

Il apparaît de ces relations que, en valeur absolue, e_{12} , θ_{22} sont tout à fait comparables à θ_{11} . Dans les calculs approchés que nous venons de faire, nous avons vu que $\frac{M_i}{\theta_0 G_0}$ est comparable à une excentricité; comme, en général, nous ne négligeons que e_0^3 , nous sommes amené à reprendre nos identifications, en conservant les produits de M_i par θ_1 , e_1 ou θ_2 .

Il y a nécessairement, dans le choix de ces termes, un peu d'arbitraire; nous ne transcrivons donc que ceux qui, en définitive, nous ont paru avoir quelque importance; dans toute approximation analogue à celle que nous faisons ici, il est toujours à craindre, ou de négliger un terme utile ou d'en conserver un qui devrait être détruit en grande partie par un autre qu'on a négligé *a priori*. Comme nous l'avons déjà dit, il est difficile de se rendre un compte exact de ces divers choix, avant d'avoir effectué les calculs numériques.

(D). *Nouvelles identifications.* — Si, dans les équations (10) et (14), nous remplaçons e , θ , g par leurs valeurs (11) et (15), et

$$\sin \theta \quad \text{par} \quad \sin \theta_0(t+c) + \frac{\theta_1}{2} \sin 2\theta_0(t+c) + \frac{\theta_2}{2} \sin \theta_0(t+c) + \frac{\theta_2}{2} \sin 3\theta_0(t+c),$$

$$\cos \theta \quad \text{»} \quad \cos \theta_0(t+c) - \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_1}{2} \cos 2\theta_0(t+c) - \frac{\theta_2}{2} \cos \theta_0(t+c) + \frac{\theta_2}{2} \cos 3\theta_0(t+c),$$

$$\sin 2\theta \quad \text{»} \quad \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_1 \sin 3\theta_0(t+c) - \theta_1 \sin \theta_0(t+c),$$

$$\cos 2\theta \quad \text{»} \quad \cos 2\theta_0(t+c) - \theta_1 \cos \theta_0(t+c) + \theta_1 \cos 3\theta_0(t+c) - \theta_2,$$

$$\frac{1}{e} \quad \text{»} \quad \frac{1}{e_0} - \frac{e_1}{e_0^2} \cos \theta_0(t+c),$$

nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 -e_1 \theta_0 &= -\frac{M_2}{G_0} + G_0 M'_2 e_0^2 - \frac{M_2}{2G_0} \theta_2 + \frac{M_3}{G_0} e_1 - \frac{2M_3}{G_0} \theta_1 e_0, \\
 -2e_2 \theta_0 &= G_0 M'_2 e_0 e_1 - \frac{M_2}{2G_0} \theta_1 + \frac{G_0 M'_2}{2} \theta_1 e_0^2 + \frac{2M_3}{G_0} e_0, \\
 -3e_3 \theta_0 &= -\frac{M_2}{2G_0} \theta_2 + \frac{M_3}{G_0} e_1 + \frac{2M_3}{G_0} \theta_1 e_0, \\
 \\
 \theta_0 &= \frac{1}{G_0^3} - 2G_0 M'_0 + \frac{2M_1}{G_0} - 2n' + \frac{3}{2G_0^3} (e_0^2 + \frac{e_1^2}{2}) + \frac{M_2 e_1}{2G_0 e_0^2} + \frac{M_2 \theta_1}{2G_0 e_0}, \\
 \theta_0 \theta_1 &= \frac{3}{G_0^3} e_0 e_1 + \left(3G_0 M'_2 - \frac{M_2}{2G_0}\right) e_0 - \frac{M_2}{G_0 e_0} + \frac{M_2 \theta_2}{2G_0 e_0} - \frac{2M_3}{G_0} \theta_1, \\
 2\theta_0 \theta_2 &= \frac{3}{2G_0^3} \left(\frac{e_1^2}{2} + 2e_0 e_2\right) + \left(3G_0 M'_2 - \frac{M_2}{2G_0}\right) \left(\frac{\theta_1 e_0}{2} + \frac{e_1}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{M_2 e_1}{2G_0 e_0^2} - \frac{M_2 \theta_1}{2G_0 e_0} + \frac{2M_3}{G_0} - 2G_0 M'_3 e_0^2 + \frac{M_3}{G_0} e_0^2, \\
 3\theta_0 \theta_3 &= \frac{3e_0 e_3}{G_0^3} - \frac{M_2 \theta_2}{2G_0 e_0} + \frac{2M_3}{G_0} \theta_1, \\
 \\
 g_0 &= \frac{2M_1}{G_0} + \frac{M_2 e_1}{2G_0 e_0^2} + \frac{M_2 \theta_1}{2G_0 e_0}, \\
 \theta_0 g_1 &= -\frac{M_2}{G_0 e_0} + \frac{M_2 \theta_2}{2G_0 e_0} + G_0 M'_2 e_0 - \frac{2M_3}{G_0} \theta_1, \\
 2\theta_0 g_2 &= \frac{M_2 e_1}{2G_0 e_0^2} - \frac{M_2 \theta_1}{2G_0 e_0} + \frac{G_0 M'_2}{2} e_1 + \frac{2M_3}{G_0} + \frac{G_0 M'_2}{2} \theta_1 e_0 - 2G_0 M'_3 e_0^2, \\
 3\theta_0 g_3 &= -\frac{M_2 \theta_2}{2G_0 e_0} + \frac{2M_3}{G_0} \theta_1.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Sous cette forme plus compliquée, les équations d'identification nous montrent encore que $e_1, e_2, \theta_0, g_0, \theta_2, g_2$ sont des fonctions paires de e_0 , tandis que $e_3, \theta_1, \theta_3, g_1, g_3$ en sont des fonctions impaires. Si l'on remplace ces quantités par leurs expressions (17) et qu'on ordonne les valeurs de $e_{ik}, \theta_{ik}, g_{ik}$ suivant les puissances de la masse m' , on trouve encore que, à quelques petits termes près, les relations (18) données plus haut sont vérifiées; nous effectuerons désormais les calculs, sans nous occuper de l'exposant de m' , et nous admettrons que les relations (18) ont encore lieu.

Il nous faut d'abord calculer θ_{00}, g_{00} ; pour cela, dans les expressions (20) de θ_0, g_0 , nous remplaçons $e_{11}, e_{12}, \theta_{11}$ par leurs parties principales (19); nous avons vérifié, après avoir obtenu les expressions numériques de tous les coeffi-

cients, qu'une seconde approximation donnait pour θ_{00} , g_{00} des valeurs peu différentes de celles qu'on avait calculées ainsi; les différences étaient de l'ordre des termes négligés.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons désormais

$$\alpha_i = \frac{M_i}{\theta_0 G_0},$$

et nous écrirons θ_0 , g_0 , au lieu de θ_{00} , g_{00} ; nous avons, de cette façon,

$$(21) \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{r}{G_0^3} - 2 G_0 M'_0 + \frac{2 M_1}{G_0} + \frac{9 \alpha_2^2}{4 G_0^3} - 2 n', \\ g_0 = \frac{2 M_1}{G_0} + \frac{3 \alpha_2^2}{2 G_0^3}; \end{cases}$$

g_0 se compose de deux termes dont l'un contient m' et l'autre m'^2 ; les calculs numériques nous montreront que le second est le plus important des deux.

Pour les autres inconnues, on a successivement

$$(22) \quad \begin{cases} \theta_{02} = \frac{3}{2 G_0^3}, \\ e_{22} = -\frac{\alpha_2^2}{4}, \\ e_3 = e_0^2 \left(\frac{\alpha_2 \theta_{22}}{6} - \frac{\alpha_3 e_{12}}{3} - \frac{2 \alpha_3 \theta_{11}}{3} \right) \\ \text{(nous pouvons écrire, } e_3 = e_{32} e_0^2 \text{).} \end{cases}$$

Enfin, les cinq quantités e_{11} , e_{12} , e_{21} , θ_{11} , θ_{12} sont définies par les cinq équations suivantes, dont les quatre premières sont linéaires,

$$(23) \quad \begin{cases} (1 + 3 \alpha_3) e_{11} + \frac{\alpha_2}{2} e_{21} - \alpha_2 = 0, \\ \frac{3}{2 \theta_0 G_0^3} e_{11} + (1 + \alpha_3) e_{12} - \frac{\alpha_2}{2} \theta_{22} - 2 \alpha_2 \theta_{11} + \frac{G_0 M'_2}{\theta_0} = 0, \\ 2 e_{21} + \frac{G_0 M'_2}{2 \theta_0} e_{11} - \frac{\alpha_2}{2} \theta_{11} + 2 \alpha_3 - \frac{3 \alpha_2^2}{4 \theta_0 G_0^3} = 0, \\ (1 + 2 \alpha_3) \theta_{11} - \frac{9}{2 \theta_0 G_0^3} e_{11} - \frac{\alpha_2}{2} \theta_{22} - \frac{3 G_0 M'_2}{\theta_0} + \frac{\alpha_2}{2} = 0, \\ \frac{3}{2 \theta_0 G_0^3} (e_{11} e_{12} + 4 e_{21}) + \frac{\theta_{11} + e_{12}}{2} \left(\frac{3 G_0 M'_2}{\theta_0} - \frac{\alpha_2}{2} \right) - 2 \theta_{22} + \alpha_3 - \frac{2 G_0 M'_3}{\theta_0} = 0. \end{cases}$$

Dès qu'on a une valeur approchée de G_0 , on calcule, à l'aide d'approximations successives, θ_0 et g_0 , dont les expressions renferment un petit terme qui con-

tient θ_0 ; pour résoudre le système (23), on remarque que la première et la troisième équation donnent e_{11} et e_{21} en fonction linéaire de θ_{11} ; ensuite la quatrième fournit θ_{22} et la seconde e_{12} en fonction linéaire de θ_{11} ; après la substitution de ces valeurs dans la dernière, on obtient une équation du second degré en θ_{11} .

Le calcul se fait rapidement, avec une seule approximation, parce que le coefficient de θ_{11}^2 est très petit.

Des équations (20) on tire enfin, pour g_{11} et g_{22} , les valeurs suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} g_{11} = \frac{3}{2\theta_0 G_0^2} e_{11} + \frac{\alpha_2}{2} \theta_{22} - 2\alpha_2 \theta_{11} + \frac{G_0 M'_2}{\theta_0}, \\ g_{22} = \frac{3}{2\theta_0 G_0^2} e_{21} + \frac{G_0 M'_1}{4\theta_0} e_{12} + \frac{G_0 M'_2}{4\theta_0} \theta_{11} - \frac{G_0 M'_2}{\theta_0}, \end{cases}$$

qu'on détermine après avoir résolu le système (23); on peut vérifier, d'ailleurs, à l'aide des équations (20), que le coefficient $\theta_{11} - g_{11}$, qui sera plus loin un des coefficients les plus importants à considérer dans l'expression de la longitude moyenne, a pour expression

$$(25) \quad \theta_{11} - g_{11} = \frac{3}{\theta_0 G_0^2} e_{11} + \frac{2G_0 M'_2}{\theta_0} - \frac{\alpha_2}{2}.$$

Quant aux coefficients θ_2 et g_2 , qu'on pourrait calculer à part, nous verrons plus loin qu'on n'a besoin de connaître que $\theta_2 - g_2$; avec l'approximation de nos formules, cette différence qui est égale à $\frac{e_0 e_2}{G_0^2}$ est tout à fait négligeable.

De même si l'on considère, dans e_2 , le terme indépendant de e_0 , on le trouve égal à $-\frac{1}{3}\alpha_2\alpha_3$; nous l'avons aussi négligé; un calcul simple montre, d'ailleurs, qu'il se détruirait en grande partie avec le terme qu'on obtiendrait pour e_2 , si, dans le développement de la fonction perturbatrice, on avait tenu compte du terme en $e^3 \cos 3\theta$.

(E). *Changement de variables.* — Après cette discussion, un peu longue mais si importante pour les calculs qui suivent, nous allons remplacer L , G , g , h , par d'autres variables qui offrent, entre autres avantages, celui de faire disparaître e_0 du dénominateur.

A cet effet, posons

$$(26) \quad \begin{cases} L = L, \\ \lambda = l + g + h, \\ \eta = \sqrt{L} e \sin(g + h), \\ \xi = \sqrt{L} e \cos(g + h). \end{cases}$$

Les nouvelles variables sont définies par des équations canoniques analogues aux équations (2), comme on s'en rend compte en se reportant à la transformation effectuée par M. Poincaré (1), ou encore aux formules données par M. Tisserand (2), dans lesquelles on néglige les puissances de e supérieures à la deuxième.

On obtient aisément, pour les expressions des nouvelles variables, les formules suivantes :

$$(27) \left\{ \begin{aligned} L &= G_0 \left[1 - \frac{e_0^2}{2} - \frac{e_1^2}{2} \cos^2 \theta_0(t+c) - e_0 e_1 \cos \theta_0(t+c) \right. \\ &\quad \left. - e_0 e_2 \cos 2\theta_0(t+c) - e_0 e_3 \cos 3\theta_0(t+c) \right], \\ \lambda &= (\theta_0 - g_0)(t+c) + (\theta_1 - g_1) \sin \theta_0(t+c) \\ &\quad + (\theta_2 - g_2) \sin 2\theta_0(t+c) - g_m - h + 2l' + 2g' + 2h', \\ \eta &= \sqrt{G_0} e_0 \sin [g_m + h + g_0(t+c)] + \sqrt{G_0} e_1 \sin [g_m + h - (\theta_0 - g_0)(t+c)] \\ &\quad + \sqrt{G_0} e_2 \sin [g_m + h - (2\theta_0 - g_0)(t+c)] + \sqrt{G_0} e_3 \sin [g_m + h - (3\theta_0 - g_0)(t+c)], \\ \xi &= \sqrt{G_0} e_0 \cos [g_m + h + g_0(t+c)] + \sqrt{G_0} e_1 \cos [g_m + h - (\theta_0 - g_0)(t+c)] \\ &\quad + \sqrt{G_0} e_2 \cos [g_m + h - (2\theta_0 - g_0)(t+c)] + \sqrt{G_0} e_3 \cos [g_m + h - (3\theta_0 - g_0)(t+c)]. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières expressions ne sont exactes que si l'on a les relations

$$\begin{aligned} e_1 + e_0 g_1 &= 0, \\ e_2 + e_0 g_2 &= 0, \\ e_3 + e_0 g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Cela a lieu identiquement si, dans les équations (20), on se contente des termes du premier ordre par rapport à la masse; avec les équations données plus haut, cela ne semble plus exact. Si l'on cherche à vérifier ces identités, les termes qui restent se détruisent en grande partie deux à deux, ou ils sont peu importants, ou encore ils proviennent de ce que *chacune des expressions de $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$, en fonction de e_0 , ne contient que deux termes*. Nous considérerons donc les relations (27) comme suffisamment exactes; d'ailleurs, le calcul de e_1, e_2, e_3 est plus simple que celui de g_1, g_2, g_3 ; c'est pour cela que, dans les deux dernières équations, nous avons employé les coefficients e_1, e_2, e_3 de préférence à g_1, g_2, g_3 .

(F). *Solution périodique de la première sorte.* — Les équations (27) donnent les intégrales générales ou, pour employer le langage de M. Poincaré, toutes les

(1) POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles*, t. I, p. 30.

(2) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. III, p. 238.

solutions périodiques du problème restreint. Les expressions des éléments L, λ, η, ξ en fonction des constantes arbitraires G_0, e_0, g_m, c sont encore loin d'être simples. Aussi devons-nous choisir, comme première approximation, une solution particulière de ces équations (27).

Deux choix sont possibles : ou l'on peut supposer tout d'abord que le moyen mouvement d'Hécube est exactement le double de celui de Jupiter, ou l'on choisit une solution périodique de la première sorte, dans laquelle on se sert de la valeur exacte du moyen mouvement de la planète troublée.

Avant d'obtenir les formules précédentes, nous nous étions inspiré du Travail de M. Harzer pour tirer, du premier Mémoire de M. Poincaré, des formules qui devaient nous donner le mouvement d'Hécube ; dans une première approximation, nous avons supposé que les moyens mouvements des planètes troublée et troublante étaient commensurables. La détermination du mouvement des apsides (de la quantité appelée plus haut g_0) provenait de la considération des termes en e' de la fonction perturbatrice ; l'influence de ces termes avait été calculée par la méthode des coefficients indéterminés ; dans la recherche des valeurs de ces coefficients et de g_0 , on rencontrait, entre autres, la difficulté suivante : les équations ne contenaient que des termes du premier ordre par rapport à la masse, et nous savons maintenant qu'on ne peut avoir ainsi une valeur assez approchée de g_0 . Une méthode assez analogue avait servi à M. Harzer (1) pour calculer cette même quantité qu'il appelait ζ ; dans la détermination de ζ , il tenait compte du terme du deuxième ordre en m' .

Sur les conseils de M. Poincaré, ces formules ont été remplacées par celles qui sont données plus haut. Nous obtenons une orbite plus voisine de la vérité en prenant pour n non plus $2n'$, mais la valeur exacte du moyen mouvement d'Hécube ; aussi avons-nous considéré comme première approximation la solution périodique de la première sorte, particulièrement simple, qu'on obtient en supposant

$$\begin{aligned} e_0 &= 0, \\ c &= 0, \end{aligned}$$

et en admettant que G_0^2 est la valeur moyenne du demi grand axe de l'orbite d'Hécube. Nous savons que l'origine du temps est choisie de façon qu'à ce moment les deux planètes troublée et troublante soient en conjonction, et que la première passe au périhélie ; si nous désignons par J la longitude commune aux deux planètes à cet instant, nous avons

$$J = g_m + h;$$

(1) HARZER, *Untersuchungen über einen speciellen Fall.*, p. 91.

au lieu de rencontrer des difficultés dans la détermination de g_0 , c'est désormais dans celle de G_0 qu'elles apparaîtront.

Dans une première approximation, nous remplaçons ainsi les équations (27) par le système suivant :

$$(28) \quad \begin{cases} L = G_0, \\ \lambda = J + nt, \quad \text{où} \quad n = \theta_0 - g_0 + 2n', \\ \eta = e_{11}\sqrt{G_0} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t], \\ \xi = e_{11}\sqrt{G_0} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t]. \end{cases}$$

Notons tout de suite la concordance de ces résultats et de ceux qu'a donnés M. Tisserand dans le *Bulletin astronomique* (1). Si, dans la première équation (23), on néglige les termes du second ordre en m' , on trouve

$$e_{11} = \alpha_2 = \frac{M_2}{\theta_0 G_0} = \frac{m'[4A^{(2)} + A_1^{(2)}]}{2\theta_0 G_0};$$

la valeur exacte de e_{11} diffère très peu de celle-ci; l'expression de e_1 obtenue par M. Tisserand est identique à la valeur précédente, pourvu que, dans le petit diviseur qu'il appelle σ , on remplace $\frac{n - 2n'}{n'}$ par $\frac{2(n - 2n')}{n}$, ce qui revient à changer σ d'une quantité de l'ordre de σ^2 , par suite tout à fait négligeable.

Telle est la solution périodique qui va nous servir de point de départ pour obtenir des orbites aussi voisines que possible de l'orbite réelle.

(G). *Équations aux variations.* — Dès qu'on connaît une solution périodique du problème, toutes celles qui en diffèrent peu s'obtiennent par l'intégration d'un système d'équations linéaires et homogènes; ce sont ces équations que M. Poincaré a appelées *équations aux variations* (2).

Dans le cas actuel, le problème est simplifié, grâce à cette circonstance que les équations (27) nous donnent l'expression générale de L, λ, η, ξ en fonction du temps et des quatre constantes arbitraires G_0, g_m, e_0, c . La solution cherchée s'obtient en remplaçant, dans les seconds membres des équations (27), G_0, e_0, g_m, c respectivement par $G_0 + \delta G_0, \delta e_0, \delta g_m, \delta c$, et enfin en donnant

(1) *Bulletin astronomique*, t. III, p. 428, formule (B).

(2) *Les Méthodes nouvelles*, t. I, p. 162.

dans les coefficients de δG_0 , δe_0 , δg_m , δc , à e_0 , c , et g_m les valeurs

$$\begin{aligned} e_0 &= 0, \\ c &= 0, \\ g_m &= J - h. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi l'expression de L , λ , η , ξ , en fonction des quatre constantes arbitraires δG_0 , δg_m , δe_0 , δc .

Remarquons, dès maintenant, que les coefficients de δg_m et de δc , après qu'on a remplacé e_0 par zéro, sont identiques, au facteur constant près :

$$- \theta_0 + g_0;$$

il est donc nécessaire, pour avoir quatre constantes arbitraires distinctes, de remplacer G_0 , e_0 , g_m , c par d'autres constantes.

Posons donc

$$\begin{aligned} G_0 &= G_0, \\ e_0 &= e_0 \cos c, \\ e'_0 &= e_0 \sin c, \\ \gamma_m &= g_m - (\theta_0 - g_0)c. \end{aligned}$$

Comme nous devons, après avoir effectué les calculs, supposer $e_0 = 0$, nous pouvons, dans cette étude relative aux équations aux variations, négliger e_0^2 ; en tenant compte des relations précédentes, nous remplaçons ainsi les équations (27) par le système suivant :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= G_0 - e_{11} G_0 \varepsilon_0 \cos \theta_0 t + e_{11} G_0 \varepsilon'_0 \sin \theta_0 t, \\ \lambda &= (\theta_0 - g_0)t + (\theta_{11} - g_{11})\varepsilon_0 \sin \theta_0 t + (\theta_{11} - g_{11})\varepsilon'_0 \cos \theta_0 t - \gamma_m - h + 2l' + 2g' + 2h', \\ \eta &= \sqrt{G_0} \varepsilon_0 \sin(\gamma_m + h + g_0 t) + \sqrt{G_0} \varepsilon'_0 \cos(\gamma_m + h + g_0 t) + e_{11} \sqrt{G_0} \sin[\gamma_m + h - (\theta_0 - g_0)t] \\ &\quad + e_{21} \sqrt{G_0} \varepsilon_0 \sin[\gamma_m + h - (2\theta_0 - g_0)t] - e_{21} \sqrt{G_0} \varepsilon'_0 \cos[\gamma_m + h - (2\theta_0 - g_0)t], \\ \xi &= \sqrt{G_0} \varepsilon_0 \cos(\gamma_m + h + g_0 t) - \sqrt{G_0} \varepsilon'_0 \sin(\gamma_m + h + g_0 t) + e_{11} \sqrt{G_0} \cos[\gamma_m + h - (\theta_0 - g_0)t] \\ &\quad + e_{21} \sqrt{G_0} \varepsilon_0 \cos[\gamma_m + h - (2\theta_0 - g_0)t] + e_{21} \sqrt{G_0} \varepsilon'_0 \sin[\gamma_m + h - (2\theta_0 - g_0)t]. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de δG_0 , $\delta \varepsilon_0$, $\delta \varepsilon'_0$, $\delta \gamma_m$, analogues aux coefficients des quantités δG_0 , δe_0 , δg_m , δc , citées plus haut, s'obtiennent en calculant, dans les équations (29), les dérivées de L , λ , η , ξ , respectivement par rapport à G_0 , ε_0 , ε'_0 , γ_m , puis en remplaçant, dans les résultats, ε_0 et ε'_0 par zéro et γ_m par $J - h$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial G_0} &= 1, & \frac{\partial \lambda}{\partial G_0} &= \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} t, \\
 \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_0} &= -e_{11} G_0 \cos \theta_0 t, & \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon_0} &= (\theta_{11} - g_{11}) \sin \theta_0 t, \\
 \frac{\partial L}{\partial \varepsilon'_0} &= e_{11} G_0 \sin \theta_0 t, & \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon'_0} &= (\theta_{11} - g_{11}) \cos \theta_0 t, \\
 \frac{\partial L}{\partial \gamma_m} &= 0, & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_m} &= -1, \\
 \frac{\partial \eta}{\partial G_0} &= \frac{\partial(e_{11}\sqrt{G_0})}{\partial G_0} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t] - e_{11}\sqrt{G_0} \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} t \cos[J - (\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \xi}{\partial G_0} &= \frac{\partial(e_{11}\sqrt{G_0})}{\partial G_0} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t] + e_{11}\sqrt{G_0} \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} t \sin[J - (\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_0} &= \sqrt{G_0} \sin(J + g_0 t) + e_{21}\sqrt{G_0} \sin[J - (2\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_0} &= \sqrt{G_0} \cos(J + g_0 t) + e_{21}\sqrt{G_0} \cos[J - (2\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon'_0} &= \sqrt{G_0} \cos(J + g_0 t) - e_{21}\sqrt{G_0} \cos[J - (2\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon'_0} &= -\sqrt{G_0} \sin(J + g_0 t) + e_{21}\sqrt{G_0} \sin[J - (2\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \gamma_m} &= e_{11}\sqrt{G_0} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t], \\
 \frac{\partial \xi}{\partial \gamma_m} &= -e_{11}\sqrt{G_0} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t].
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Si nous multiplions par quatre constantes arbitraires, A, B, B', C, les dérivées de L, λ, η, ξ, prises respectivement par rapport à G₀, ε₀, ε'₀, γ_m, nous obtenons les expressions qu'il faut ajouter aux seconds membres des formules (28) pour avoir les intégrales générales demandées; les constantes d'intégration entrent désormais, dans les équations, d'une façon commode pour les calculs numériques.

(H). *Introduction de nouveaux termes.* — Pour que les équations ainsi obtenues puissent représenter, à très peu près, l'orbite d'Hécube, il faut que chacune des constantes A, B, B', C soit assez petite.

Si l'on prend pour G₀² une valeur assez approchée du demi grand axe moyen, comme nous savons, d'autre part, que la conjonction des deux planètes, troublée et troublante, a lieu à une époque très voisine de celle où la première passe à son périhélie, il en résulte que δG₀, c, δg_m sont, en réalité, très petits; en d'autres

termes, les valeurs que nous trouverons plus loin pour A, B', C seront certainement faibles.

Mais il n'en est plus de même pour B; en effet $\delta\epsilon_0$ ou δe_0 ne sont autres que e_0 ; or l'excentricité d'Hécube, d'après les éléments de M. Schulhof, est d'environ $\frac{1}{10}$; d'autre part, si l'on voulait, tout d'abord, ne plus supposer $e_0 = 0$, il serait difficile, *a priori*, en raison des grandes perturbations de l'excentricité, de choisir une valeur de e_0 plus voisine de la réalité que celle que nous avons prise: en outre, avec une valeur finie de e_0 , les calculs seraient énormément plus compliqués, et nous ne pourrions plus adopter, comme première approximation, une solution périodique de la première sorte.

Nous nous sommes donc décidé à conserver la première valeur adoptée pour e_0 ; mais nous avons développé, dans les équations (27), les expressions des coefficients en conservant ϵ_0^2 et $\epsilon_0\epsilon_0'$; nous avons tenu compte aussi de ce que $\theta_0 - g_0$ contient un terme en e_0^2 dont le coefficient $\frac{3}{2G_0^2}$ est indépendant de la masse m' .

Dans la première équation (27), $-\frac{G_0 e_0^2}{2}$ donne lieu, dans l'expression définitive de L, au terme $-G_0 \frac{B^2}{2}$; la somme

$$-G_0 \frac{e_0^2}{2} \cos^2 \theta_0 (t+c) - G_0 e_0 e_2 \cos 2\theta_0 (t+c)$$

se réduit à un terme constant et à un terme en e_0^2 , assez peu importants pour que nous ayons cru devoir les négliger.

En ce qui concerne λ , $(\theta_2 - g_2) \sin 2\theta_0 (t+c)$ fournit les deux petits termes

$$(\theta_{22} - g_{22}) B^2 \sin 2\theta_0 t \quad \text{et} \quad 2(\theta_{22} - g_{22}) BB' \cos 2\theta_0 t;$$

$(\theta_0 - g_0)t$ donne le terme $\frac{3}{2G_0^2} B^2 t$.

Quant aux expressions de η et de ξ , on voit aisément que

$$e_1 \sqrt{G_0} \frac{\sin}{\cos} \left\{ [g_m + h - (\theta_0 - g_0)(t+c)] \right\}$$

conduit aux deux termes

$$B^2 e_{12} \sqrt{G_0} \frac{\sin}{\cos} \left\{ [J - (\theta_0 - g_0)t] \right\} \quad \text{et} \quad \mp B^2 e_{11} \sqrt{G_0} \frac{3}{2G_0^2} t \frac{\cos}{\sin} \left\{ [J - (\theta_0 - g_0)t] \right\}.$$

Cela posé, les expressions générales de L, λ , η , ξ , dans lesquelles on a négligé, comme étant trop faibles, les seconds termes des expressions de $\frac{\partial \eta}{\partial \epsilon_0}$ et

de $\frac{\partial \xi}{\partial e_0}$, qui contiennent le produit $B'e_{21}$, sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 L &= G_0 + A - \frac{B^2 G_0}{2} - B G_0 e_{11} \cos \theta_0 t + B' G_0 e_{11} \sin \theta_0 t, \\
 \lambda &= J + nt + A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} t + \frac{3}{2 G_0^2} B^2 t + B(\theta_{11} - g_{11}) \sin \theta_0 t + B'(\theta_{11} - g_{11}) \cos \theta_0 t - C \\
 &\quad + B^2(\theta_{22} - g_{22}) \sin 2\theta_0 t + 2 B B'(\theta_{22} - g_{22}) \cos 2\theta_0 t, \\
 \eta &= \left[e_{11} \sqrt{G_0} + A \frac{\partial(e_{11} \sqrt{G_0})}{\partial G_0} + e_{12} \sqrt{G_0} B^2 \right] \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad - \left[A e_{11} \sqrt{G_0} \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3}{2 G_0^2} e_{11} \sqrt{G_0} B^2 \right] t \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + C e_{11} \sqrt{G_0} \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] + B \sqrt{G_0} \sin (J + g_0 t) + B' \sqrt{G_0} \cos (J + g_0 t) \\
 &\quad + B e_{21} \sqrt{G_0} \sin [J - (2\theta_0 - g_0) t] + e_{22} \sqrt{G_0} B^2 \sin [J - (3\theta_0 - g_0) t], \\
 \xi &= \left[e_{11} \sqrt{G_0} + A \frac{\partial(e_{11} \sqrt{G_0})}{\partial G_0} + e_{12} \sqrt{G_0} B^2 \right] \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + \left[A e_{11} \sqrt{G_0} \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3}{2 G_0^2} e_{11} \sqrt{G_0} B^2 \right] t \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad - C e_{11} \sqrt{G_0} \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] + B \sqrt{G_0} \cos (J + g_0 t) - B' \sqrt{G_0} \sin (J + g_0 t) \\
 &\quad + B e_{21} \sqrt{G_0} \cos [J - (2\theta_0 - g_0) t] + e_{22} \sqrt{G_0} B^2 \cos [J - (3\theta_0 - g_0) t].
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

4. INFLUENCE DES TERMES EN e' . — Nous avons obtenu une première approximation de la question proposée, en supposant $e' = 0$.

Pour tenir compte, désormais, des termes de la fonction perturbatrice qui renferment e' , rappelons-nous que L, λ, η, ξ sont des variables canoniques; par suite, si l'on désigne par $L_1, \lambda_1, \eta_1, \xi_1$ les valeurs de L, λ, η, ξ données par les équations (28), par $\delta L, \delta \lambda, \delta \eta, \delta \xi$ les accroissements de ces quantités, provenant des termes en e' , par R_2 la somme des termes de la fonction perturbatrice qui contiennent le facteur e' , nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\delta L)}{dt} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial L \partial \lambda} \delta L + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \lambda^2} \delta \lambda + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \lambda \partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \lambda \partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial R_2}{\partial \lambda}, \\
 -\frac{d(\delta \lambda)}{dt} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial L^2} \delta L + \frac{\partial^2 R_1}{\partial L \partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial^2 R_1}{\partial L \partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial^2 R_1}{\partial L \partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial R_2}{\partial L}, \\
 \frac{d(\delta \eta)}{dt} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial L} \delta L + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi^2} \delta \xi + \frac{\partial R_2}{\partial \xi}, \\
 -\frac{d(\delta \xi)}{dt} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial \eta \partial L} \delta L + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \eta \partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \eta^2} \delta \eta + \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial \eta} \delta \xi + \frac{\partial R_2}{\partial \eta}, \\
 R_1 &= \frac{1}{2 L^2} + M_0 + \frac{M_1(\xi^2 + \eta^2)}{L} - \frac{M_2}{\sqrt{L}} [\xi \cos(\lambda - 2\lambda') - \eta \sin(\lambda - 2\lambda')] \\
 &\quad + \frac{M_3}{L} [(\xi^2 - \eta^2) \cos(2\lambda - 4\lambda') - 2\xi\eta \sin(2\lambda - 4\lambda')], \\
 R_2 &= M_4 e' \cos(\lambda - 2\lambda' + g' + h') \\
 &\quad - \frac{M_5 e'}{\sqrt{L}} [\xi \cos(2\lambda - 4\lambda' + g' + h') - \eta \sin(2\lambda - 4\lambda' + g' + h')] \\
 &\quad + \frac{M_6 e'}{\sqrt{L}} [\xi \cos(g' + h') + \eta \sin(g' + h')].
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Dans les expressions de R_1 et de R_2 en fonction des nouvelles variables L, λ, η, ξ , nous avons posé

$$\lambda' = l' + g' + h'.$$

Si, dans les dérivées secondes de R_1 et dans les dérivées premières de R_2 , on remplace, une fois les différentiations effectuées, L, λ, η, ξ , respectivement par $L_1, \lambda_1, \eta_1, \xi_1$, et qu'on néglige le double de l'argument : $J - (\theta_0 - g_0)t$, on obtient les équations suivantes :

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{d(\delta L)}{dt} &= P_{12} \delta \lambda + P_{13} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \eta - P_{13} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \xi \\ &\quad + P_{10} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ - \frac{d(\delta \lambda)}{dt} &= P_{21} \delta L + P_{22} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \eta + P_{22} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \xi \\ &\quad + P_{20} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ \frac{d(\delta \eta)}{dt} &= P_{22} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta L - P_{13} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \lambda \\ &\quad + \frac{2M_1}{G_0} \delta \xi + \frac{M_6 e'}{\sqrt{G_0}} \cos(g' + h'), \\ - \frac{d(\delta \xi)}{dt} &= P_{22} \sin[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta L + P_{13} \cos[J - (\theta_0 - g_0)t] \delta \lambda \\ &\quad + \frac{2M_1}{G_0} \delta \eta + \frac{M_6 e'}{\sqrt{G_0}} \sin(g' + h'). \end{aligned} \right.$$

Les coefficients P_{ik} , dans ces équations, ont les valeurs suivantes :

$$(34) \left\{ \begin{aligned} P_{12} &= e_{11} (M_2 - 4M_3 e_{11}), & P_{21} &= \frac{3}{G_0^2} + 2M'_0 + 4G_0^2 M'_0 - e_{11} \left[4G_0^2 M'_2 + \frac{3M_2}{4G_0^2} \right], \\ P_{13} &= \frac{M_2 - 4M_3 e_{11}}{\sqrt{G_0}}, & P_{22} &= 4e_{11} \sqrt{G_0} (M'_1 + M'_2) - \frac{2e_{11} (M_1 + M_2)}{G_0 \sqrt{G_0}} \\ & & &\quad - 2\sqrt{G_0} M'_2 + \frac{M_2}{2G_0 \sqrt{G_0}}, \\ P_{10} &= e' (M_4 - 2M_5 e_{11}), & P_{20} &= 2G_0 M'_4 e' - 2G_0 (M'_3 - M'_4) e_{11} e' + \frac{M_5 - M_6}{2G_0} e_{11} e'. \end{aligned} \right.$$

Si l'on néglige R_2 , l'intégrale générale des équations (32) est donnée par les formules (31); il nous suffit donc, pour résoudre le problème proposé, de chercher une intégrale particulière des équations (33); on en obtient une,

en posant

$$(35) \quad \begin{cases} \delta L = A_1 \cos [J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ \delta \lambda = B_1 \sin [J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ \delta \eta = C_1 \sin (g' + h'), \\ \delta \xi = C_1 \cos (g' + h'). \end{cases}$$

Les valeurs de A_1, B_1, C_1 sont fournies par l'identification des équations (33) et (35); les relations ainsi obtenues sont

$$(36) \quad \begin{cases} -(\theta_0 - g_0)A_1 + P_{12}B_1 - P_{13}C_1 + P_{10} = 0, \\ P_{21}A_1 - (\theta_0 - g_0)B_1 + P_{22}C_1 + P_{20} = 0, \\ P_{32}A_1 - P_{13}B_1 + \frac{4M_1}{G_0}C_1 + \frac{2M_3 e'}{\sqrt{G_0}} = 0. \end{cases}$$

Le problème proposé est donc résolu, en ce qui concerne les quatre éléments L, λ, η, ξ .

On pourrait se demander si nous avons le droit de négliger le terme à longue période en e'^2 , dans la fonction perturbatrice, alors que nous conservons dans les calculs les termes qui ont en facteur B^2 ou BB' ; il est vrai que e'^2 est inférieur à e^2 et à ee' .

Quoi qu'il en soit, nous avons calculé, à part, l'influence de ce terme qui introduisait dans les formules (35) les nouvelles expressions

$$\begin{aligned} \delta' L &= A_2 \cos 2 [J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ \delta' \lambda &= B_2 \sin 2 [J - (\theta_0 - g_0)t - g' - h'], \\ \delta' \eta &= C_2 \sin [J - (\theta_0 - g_0)t - 2g' - 2h'], \\ \delta' \xi &= C_2 \cos [J - (\theta_0 - g_0)t - 2g' - 2h']. \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues pour A_2, B_2 étaient du même ordre de grandeur que A_1, B_1 .

Si l'on se reporte aux expressions des termes connus dans les équations (36), on voit aisément que l'influence du terme en e' de la fonction perturbatrice est beaucoup changée par celle des deux termes en ee' ; il est donc tout naturel de supposer que A_2, B_2, C_2 changeraient aussi notablement si, au lieu du seul terme en e'^2 , on avait, en outre, tenu compte du terme en ee'^2 à longue période. Comme nous négligeons e^2 , par suite ee'^2 , il nous faut également négliger le terme en e'^2 à longue période.

5. PERTURBATIONS PÉRIODIQUES. — Avant de comparer la théorie aux observa-

tions, nous avons, suivant l'avis de M. Perrotin, calculé les perturbations à courte période les plus importantes. On peut le faire en partant des équations données plus haut, ou encore en se servant des formules données par Le Verrier (1) et par M. Tisserand (2).

Les calculs ont été faits par les deux méthodes; les résultats diffèrent assez peu pour que nous donnions ici les formules correspondant à l'une quelconque de ces méthodes; nous nous servons des formules de Le Verrier, dans lesquelles on suppose que a, λ, e, ϖ sont remplacés par leurs valeurs tirées des expressions données plus haut.

On comprend aisément que, surtout en raison des grandes variations de e et de ϖ , les diverses méthodes donnent des résultats un peu différents, puisque, suivant le procédé employé, on tient compte de divers termes du second ordre par rapport à la masse.

Remarquons qu'en raison de la commensurabilité approchée des moyens mouvements n et n' , les expressions $in - i'n'$, où i et i' sont des nombres entiers, sont à très peu près des multiples simples de n' ; il en résulte, surtout en ce qui concerne les perturbations de la longitude moyenne, des diviseurs plus petits que dans le cas général.

Nous donnons de suite les expressions de ces perturbations, $\delta_1 a, \delta_1 \lambda, \delta_1 e, e \delta_1 \varpi$ du demi grand axe, de la longitude moyenne, de l'excentricité et du périhélie; les termes ci-dessous nous ont paru être les seuls dont il fallait tenir compte; on en trouvera plus loin l'expression numérique.

$$\begin{aligned}
 \delta_1 a = & -2 m' a^2 \frac{n}{n' - n} \sum_{i=1}^{i=5} A^{(i)} \cos i(\lambda' - \lambda) + m' n a^2 e \sum_{i=0}^{i=5} \frac{(i-1)(2iA^{(i)} + A_1^{(i)})}{in' - (i-1)n} \\
 & \times \cos [i\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi] \\
 - & m' n a^2 e' \sum_{i=1}^{i=5} \frac{i[(2i+1)A^{(i)} + A_1^{(i)}]}{(i+1)n' - in} \\
 & \times \cos [(i+1)\lambda' - i\lambda - \varpi'] \\
 - & \frac{1}{2} m' n a^2 e^2 \sum_{i=1}^{i=5} \frac{(i-2)[(4i^2 - 5i)A^{(i)} + (4i-2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}]}{in' - (i-2)n} \\
 & \times \cos [i\lambda' - (i-2)\lambda - 2\varpi] \\
 + & \frac{1}{2} m' n a^2 e e' \sum_{i=1}^{i=5} \frac{(i-1)[(4i^2 + 2i)A^{(i)} + (4i+2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}]}{(i+1)n' - (i-1)n} \\
 & \times \cos [(i+1)\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi - \varpi'],
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

(1) LE VERRIER, *Annales de l'Observatoire*, t. I, p. 268, et t. II, p. 21.

(2) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 309 et 327.

et

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \lambda = & \sum_{i=1}^{i=5} \left[\frac{3m'n^2 a}{(n'-n)^2} \frac{A^{(i)}}{i} - \frac{2m'na}{n'-n} \frac{A_1^{(i)}}{i} \right] \sin i(\lambda' - \lambda) \\
 & + \sum_{i=0}^{i=5} \left\{ \frac{3}{2} m'n^2 a e \frac{(i-1)(-2iA^{(i)} - A_1^{(i)})}{[in' - (i-1)n]^2} + m'nae \frac{(2i+1)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{in' - (i-1)n} \right\} \\
 & \quad \times \sin [i\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi] \\
 & + \sum_{i=0}^{i=4} \left\{ \frac{3}{2} m'n^2 a e' \frac{i[(2i+1)A^{(i)} + A_1^{(i)}]}{[(i+1)n' - in]^2} - m'nae' \frac{(2i+2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{(i+1)n' - in} \right\} \\
 & \quad \times \sin [(i+1)\lambda' - i\lambda - \varpi'] \\
 & + \sum_{i=3}^{i=5} \left\{ \frac{3}{2} m'n^2 a e^2 \frac{(i-2)[(4i^2 - 5i)A^{(i)} + (4i-2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}]}{[in' - (i-2)n]^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} m'nae^2 \frac{(4i^2 - i - 2)A_1^{(i)} + 8iA_2^{(i)} + 6A_3^{(i)}}{in' - (i-2)n} \right\} \\
 & \quad \times \sin [i\lambda' - (i-2)\lambda - 2\varpi] \\
 & + \sum_{i=2}^{i=4} \left\{ -\frac{3}{4} m'n^2 a e e' \frac{(i-1)[(4i+2i)A^{(i)} + (4i+2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}]}{[(i+1)n' - (i-1)n]^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} m'nae e' \frac{[4i^2 + 6i + 2]A_1^{(i)} + 8(i+1)A_2^{(i)} + 6A_3^{(i)}}{(i+1)n' - (i-1)n} \right\} \\
 & \quad \times \sin [(i+1)\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi - \varpi'], \\
 \partial_1 e = & -\frac{m'na}{2 \cos \psi} \sum_{i=0}^{i=5} \frac{2iA^{(i)} + A_1^{(i)}}{in' - (i-1)n} \cos [i\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi] \\
 & + \frac{m'na}{\cos \psi} \frac{e}{4} \sum_{i=3}^{i=5} \frac{(4i^2 - 5i)A^{(i)} + (4i-2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{in' - (i-2)n} \cos [i\lambda' - (i-2)\lambda - 2\varpi] \\
 & - \frac{m'na}{\cos \psi} \frac{e'}{4} \sum_{i=2}^{i=4} \frac{(4i^2 + 2i)A^{(i)} + (4i+2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{(i+1)n' - (i-1)n} \\
 & \quad \times \cos [(i+1)\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi - \varpi'], \\
 e \partial_1 \varpi = & -\frac{m'na}{2 \cos \psi} \sum_{i=0}^{i=5} \frac{2iA^{(i)} + A_1^{(i)}}{in' - (i-1)n} \sin [i\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi] \\
 & + \frac{m'na}{\cos \psi} \frac{e}{4} \sum_{i=3}^{i=5} \frac{(4i^2 - 5i)A^{(i)} + (4i-2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{in' - (i-2)n} \\
 & \quad \times \sin [i\lambda' - (i-2)\lambda - 2\varpi] \\
 & - \frac{m'na}{\cos \psi} \frac{e'}{4} \sum_{i=2}^{i=4} \frac{(4i^2 + 2i)A^{(i)} + (4i+2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}}{(i+1)n' - (i-1)n} \\
 & \quad \times \sin [(i+1)\lambda' - (i-1)\lambda - \varpi - \varpi'].
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Dans les formules (37), on a mis $\cos \psi$ à la place de $\sqrt{1 - e^2}$.

Il est bien évident qu'on ne doit pas, dans ces formules, donner à i les valeurs correspondant aux perturbations à longue période.

Les équations de la page 327 du premier Volume de la *Mécanique céleste* de M. Tisserand ont été un peu simplifiées. Au degré d'approximation où nous nous sommes placé, il a paru possible de négliger les petits termes des perturbations périodiques qui ont en facteur $\text{tang} \frac{\psi}{2}$ ou $\text{tang} \frac{\varphi}{2}$ (φ étant l'inclinaison de l'orbite). Il en résulte en particulier que les expressions de δ, e et de $e\delta, \varpi$ ont les mêmes coefficients. Ajoutons qu'au cas où, dans les formules (37), on rencontre l'un des coefficients $A^{(i)}$ ou $A_1^{(i)}$, il faut le corriger de $-\frac{a}{a'^2}$.

Quand on calcule les termes du second ordre par rapport aux excentricités, dans l'expression de la longitude moyenne on trouve que les deux coefficients d'un même sinus sont à peu près égaux en valeur absolue; ceux qui sont relatifs à l'argument $5n' - 3n$ s'ajoutent; par suite, nous conserverons dans la suite les termes qui ont l'un des arguments

$$5\lambda' - 3\lambda - 2\varpi$$

ou

$$5\lambda' - 3\lambda - \varpi - \varpi'.$$

Au contraire, les coefficients qui ont en dénominateur $(3n' - n)^2$ et $(3n' - n)$ se détruisent à très peu près; aussi, dans la suite, ne tiendrons-nous pas compte des termes en

$$3\lambda' - \lambda - 2\varpi,$$

ou

$$3\lambda' - \lambda - \varpi - \varpi',$$

en ce qui concerne la longitude. De même, dans δ, a , les perturbations correspondantes sont peu importantes, et nous les avons négligées.

L'importance que nous avons accordée, *a priori*, à ces termes du second ordre est due à ce que $3n' - n$ est environ égal à n et $5n' - 3n$ à $-n$; nous avons ainsi les plus petites valeurs absolues de

$$in' - (i - 2)n;$$

nous devons donc, avec ces seuls termes, obtenir les plus fortes perturbations périodiques du second ordre par rapport aux excentricités.

6. EXPRESSIONS DÉFINITIVES DE L, λ, η, ξ . — A ces perturbations périodiques

près, les expressions définitives de L , λ , η , ξ , sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 L &= G_0 + A - \frac{B^2 G_0}{2} - B e_{11} G_0 \cos \theta_0 t + B' e_{11} G_0 \sin \theta_0 t \\
 &\quad + A_1 \cos [J - (\theta_0 - g_0) t - g' - h'], \\
 \lambda &= J + \left[n + A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3B^2}{2G_0^2} \right] t + B(\theta_{11} - g_{11}) \sin \theta_0 t + B'(\theta_{11} - g_{11}) \cos \theta_0 t - C \\
 &\quad + B^2(\theta_{22} - g_{22}) \sin 2\theta_0 t + 2BB'(\theta_{22} - g_{22}) \cos 2\theta_0 t \\
 &\quad + B_1 \sin [J - (\theta_0 - g_0) t - g' - h'], \\
 \eta &= \left[e_{11} \sqrt{G_0} + A \frac{\partial(e_{11} \sqrt{G_0})}{\partial G_0} + B^2 e_{12} \sqrt{G_0} \right] \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad - \left[A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3B^2}{2G_0^2} \right] e_{11} \sqrt{G_0} t \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + C e_{11} \sqrt{G_0} \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] + B \sqrt{G_0} \sin (J + g_0 t) \\
 &\quad + B' \sqrt{G_0} \cos (J + g_0 t) + B e_{21} \sqrt{G_0} \sin [J - (2\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + B^2 e_{32} \sqrt{G_0} \sin [J - (3\theta_0 - g_0) t] + C_1 \sin (g' + h'), \\
 \xi &= \left[e_{11} \sqrt{G_0} + A \frac{\partial(e_{11} \sqrt{G_0})}{\partial G_0} + B^2 e_{12} \sqrt{G_0} \right] \cos [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + \left[A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3B^2}{2G_0^2} \right] e_{11} \sqrt{G_0} t \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad - C e_{11} \sqrt{G_0} \sin [J - (\theta_0 - g_0) t] + B \sqrt{G_0} \cos (J + g_0 t) \\
 &\quad - B' \sqrt{G_0} \sin (J + g_0 t) + B e_{21} \sqrt{G_0} \cos [J - (2\theta_0 - g_0) t] \\
 &\quad + B^2 e_{32} \sqrt{G_0} \cos [J - (3\theta_0 - g_0) t] + C_1 \cos (g' + h').
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Quand on aura, de ces formules (38), tiré L , λ , η , ξ ou a , λ , e , ϖ , on calculera, à l'aide des expressions (37), les perturbations périodiques de ces éléments.

Rappelons que, dans les formules (38), A , B , B' , C sont des constantes d'intégration que nous apprendrons plus loin à déterminer; les autres coefficients sont des fonctions de G_0 .

7. DÉTERMINATION DE L'INCLINAISON DE L'ORBITE ET DE LA LONGITUDE DU NOEUD ASCENDANT. — Si l'on se reporte aux *Traité*s déjà cités de M. Poincaré (1) ou de M. Tisserand (2), on voit qu'au lieu de calculer H et h , on peut choisir les deux variables :

$$\begin{aligned}
 Q &= 2L\gamma^2, \\
 &- h,
 \end{aligned}$$

(1) POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles...*, t. I, p. 30.

(2) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. III, p. 238.

qui sont définies par les équations canoniques suivantes :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial R}{\partial(-h)}, \\ \frac{d(-h)}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial Q}, \end{array} \right. \quad \text{où} \\ R = -M_7 \gamma^2 + M_8 \gamma^2 \cos(2\lambda - 4\lambda' + 2h).$$

On tire de là les nouvelles équations :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{M_8}{2L} \gamma \sin(2\lambda - 4\lambda' + 2h), \\ \frac{dh}{dt} = -\frac{M_7}{2L} + \frac{M_8}{2L} \cos(2\lambda - 4\lambda' + 2h). \end{array} \right.$$

Si nous remplaçons $\frac{d\gamma}{\gamma}$ par $\frac{di}{i}$, L par G_0 , et que nous posions :

$$(41) \quad x = \lambda - 2\lambda' + h,$$

les équations (40) deviennent, en se rappelant qu'on a posé plus haut

$$\alpha_i = \frac{M_i}{\theta_0 G_0},$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dx} = \frac{\alpha_8}{2} i \sin 2x \frac{d(x-h)}{dx}, \\ \frac{dh}{dx} = -\left(\frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2} \cos 2x\right) \frac{d(x-h)}{dx}. \end{array} \right.$$

Le système (42) est équivalent au système suivant :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(x-h) = \frac{dx}{1 - \frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2} \cos 2x}, \\ \frac{di}{i} = \frac{\alpha_8}{2} \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2} \cos 2x}. \end{array} \right.$$

La dernière de ces équations s'intègre de suite; en désignant par i_0 une con-

stante, on a

$$(44) \quad i = i_0 \left(1 - \frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2} \cos 2x \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour calculer h , posons, dans la première équation (43)

$$1 - \frac{\alpha_7}{2} = \frac{\alpha_8}{2} \frac{1 + k^2}{1 - k^2},$$

on obtient

$$d(x - h) = \frac{1 - k^2}{k \alpha_8} \frac{\frac{k dx}{\cos^2 x}}{1 + k^2 \tan^2 x};$$

x_0 étant une constante d'intégration : on a donc pour h l'expression

$$(45) \quad x - h + x_0 = \frac{1 - k^2}{k \alpha_8} \operatorname{arc} k \tan x.$$

Les expressions de i et de h peuvent, par suite, se mettre sous la forme suivante :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}[h + (\theta_0 - g_0)t - J] \\ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2}}{1 - \frac{\alpha_7}{2} - \frac{\alpha_8}{2}}} \operatorname{tang} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_8}{2}\right)^2} [x_0 + (\theta_0 - g_0)t - J] \right\}, \\ i = i_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha_7}{2} + \frac{\alpha_8}{2} \cos[2h + 2(\theta_0 - g_0)t - 2J] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

A la première inspection de ces formules, qui semblent un peu compliquées, on voit que, pour les applications numériques, on pourra les transformer aisément de façon à avoir des expressions simples de h et de i .

Nous avons déterminé également les perturbations périodiques de h et de i ; pour cela nous avons employé les formules (39), et pour les intégrations nous avons supposé h et i constants dans les termes qui contenaient la masse. Pour vérifier ces calculs, nous avons, en outre, fait usage des formules données par M. Tisserand pour le calcul du nœud ascendant et de l'inclinaison (1).

Nous ne transcrivons pas les expressions algébriques de ces perturbations que nous avons dû négliger dans les applications numériques; lorsque nous arriverons à ces dernières, nous pourrons expliquer plus clairement les raisons qui nous ont conduit à cette suppression.

(1) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 169.

8. VARIATIONS DES CONSTANTES D'INTÉGRATION. — Supposons que par une méthode quelconque on ait obtenu des valeurs approchées des constantes d'intégration; pour en avoir des valeurs plus exactes, nous comparerons les positions d'Hécube fournies, d'une part, par les formules précédentes et, de l'autre, par les observations.

Ce sont les équations nécessaires à ces calculs que nous allons donner ici, de façon à avoir toutes les expressions algébriques qui nous seront utiles, lorsque nous aborderons les applications numériques.

Désignons par dA, dB, \dots les quantités à ajouter aux valeurs approchées de A, B, \dots , et supposons que les carrés de dA , de dB, \dots et leurs produits deux à deux soient négligeables.

Nous nous servirons, en changeant un peu les notations, des formules données dans le Traité de Watson (1); désignons par

- A', B', C', a', b', c' les constantes équatoriales relatives à l'orbite d'Hécube;
- x, y, z, r, Δ les coordonnées héliocentriques d'Hécube, ses distances au Soleil et à la Terre;
- R, δ l'ascension droite et la déclinaison de la planète;
- E, v, u l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie, l'argument de la latitude;
- ε l'obliquité de l'écliptique.

Si $dR, d\delta$ sont les différences entre les positions d'Hécube fournies par l'observation et le calcul (obs. — calc.), et dx, dy, dz les variations correspondantes pour x, y, z , nous avons

$$(47) \quad \begin{cases} \cos \delta dR = -\frac{\sin R}{\Delta} dx + \frac{\cos R}{\Delta} dy, \\ d\delta = -\frac{\cos R \sin \delta}{\Delta} dx - \frac{\sin R \sin \delta}{\Delta} dy + \frac{\cos \delta}{\Delta} dz. \end{cases}$$

Les expressions de dx, dy, dz , en fonction de dr, du, dh, di , sont :

$$(48) \quad \begin{cases} dx = \sin a' \sin (A' + u) dr + r \sin a' \cos (A' + u) du \\ \quad - [y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon] dh + r \sin u \cos a' di, \\ dy = \sin b' \sin (B' + u) dr + r \sin b' \cos (B' + u) du \\ \quad + x \cos \varepsilon dh + r \sin u \cos b' di, \\ dz = \sin c' \sin (C' + u) dr + r \sin c' \cos (C' + u) du \\ \quad + x \sin \varepsilon dh + r \sin u \cos c' di; \end{cases}$$

Ces formules (47) et (48) sont extraites du Traité de Watson. Pour calculer ensuite dr et du en fonction de $dL, d\lambda, d\eta, d\zeta$, nous commencerons par écrire

(1) WATSON, *Theoretical Astronomy*..., p. 119.

les équations suivantes, dont les notations sont bien connues :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v + \varpi = h, \\ \operatorname{tang} \frac{v}{2} = \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) \operatorname{tang} \frac{E}{2}, \\ \sin \psi = e, \\ \lambda - \varpi = E - e \sin E, \\ L^2 = a, \\ r = a(1 - e \cos E), \\ \eta = e\sqrt{L} \sin \varpi, \\ \xi = e\sqrt{L} \cos \varpi. \end{array} \right.$$

Si l'on prend la dérivée logarithmique de la seconde équation (49) et qu'on remarque que e et ϖ sont donnés par les relations suivantes :

$$e^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{L},$$

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\eta}{\xi},$$

on a immédiatement

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{\sin v} = \frac{dE}{\sin E} + \frac{d\psi}{\cos \psi}, \\ d\lambda - d\varpi = dE(1 - e \cos E) - \sin E de, \\ \cos \psi d\psi = de, \\ d\varpi = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{Le^2}, \\ e de = \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{L} = \frac{e^2 dL}{2L}. \end{array} \right.$$

Les équations (50) définissent les cinq quantités dv , $d\varpi$, $d\psi$, de , dE , en fonction de dL , $d\xi$, $d\eta$. On peut les écrire

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\psi = \frac{de}{\cos \psi}, \\ de = \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{Le} - \frac{e dL}{2L}, \\ d\varpi = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{Le^2}, \\ dE = \frac{a}{r} d\lambda - \frac{a}{r} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{Le^2} + \frac{a}{r} \sin E \left(\frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{Le} - \frac{e dL}{2L} \right), \\ dv = \frac{a \sin v}{r \sin E} \left(d\lambda - \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{Le^2} + \sin E \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{Le} + \frac{e \sin E dL}{2L} \right) \\ \quad + \frac{\sin v}{Le \cos^2 \psi} (\xi d\xi + \eta d\eta) - \frac{e \sin v dL}{2L \cos^2 \psi}. \end{array} \right.$$

Des équations (49), (50) et (51), on tire, après des calculs simples et en utilisant la relation

$$r \sin \nu = a \cos \psi \sin E,$$

les expressions suivantes de du et de dr en fonction de dL , $d\lambda$, $d\eta$, $d\xi$, dh ,

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} du = -\frac{e \sin \nu}{2L} \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2 \psi} \right) dL + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi d\lambda \\ \quad + \left\{ \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2 \psi} \right) \xi \sin \nu - \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \right] \frac{\eta}{e} \right\} \frac{d\xi}{eL} \\ \quad + \left\{ \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \right] \frac{\xi}{e} + \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{\cos^2 \psi} \right) \eta \sin \nu \right\} \frac{d\eta}{eL} - dh, \\ dr = \left[\frac{r}{a} - \frac{e}{4} \frac{a}{r} (e - \cos E) \right] 2L dL + \frac{ae \sin \nu}{\cos \psi} d\lambda \\ \quad + \left[\frac{\eta \sin \nu}{\cos \psi} + \frac{a}{r} \xi (e - \cos E) \right] \frac{L}{e} d\xi + \left[\frac{a}{r} \eta (e - \cos E) + \frac{\xi \sin \nu}{\cos \psi} \right] \frac{L}{e} d\eta. \end{array} \right.$$

Il reste à calculer dL , $d\lambda$, $d\eta$, $d\xi$ en fonction de dA , dB , dB' , dC et aussi en fonction de dJ , dt , dn ; car nous devons, au début, adopter pour J , n et l'époque, des valeurs approchées. Ces expressions s'obtiennent immédiatement au moyen des équations (38). Il semble donc inutile de les écrire.

Avec les relations (47), (48) et (52), elles définissent dA , dB , dC , ... en fonction de dR et de $d\delta$.

Si nous remarquons qu'il faudra, dans le calcul de dB , tenir compte de ce que les équations du mouvement contiennent des termes en B^2 , nous en concluons que la variation dB devra être calculée la dernière et sera donnée par une équation du second degré.

Les équations différentielles ainsi obtenues nécessiteront, au début, un grand nombre d'approximations, par suite de la façon compliquée dont les constantes J et n entrent dans les équations (38); il sera même utile de négliger tout d'abord dJ , dn et dt .

Pour calculer dn , qui est précisément la variation du petit diviseur, il faut, dans les équations (38), différentier non seulement les arguments des sin et des cos, mais aussi les coefficients; nous nous sommes contenté de prendre les valeurs principales de ces coefficients, c'est-à-dire leurs expressions du premier ordre en fonction de la masse, excepté pour θ_0 , $\theta_0 - g_0$, g_0 , dont les dérivées par rapport à n se calculent simplement.

Pour nous rendre compte de la difficulté d'avoir la valeur exacte de n , reportons-nous, par exemple, aux équations (19); le coefficient θ_1 , qui entre en facteur dans l'expression de la grande perturbation de la longitude moyenne, contient le facteur $\frac{1}{\theta_0^2}$; le calcul de dn nous donnera donc le facteur $\frac{dn}{g_0^3}$ ou $\frac{d\theta_0}{g_0^3}$.

Ce calcul n'est possible que si $d\theta_0$ est plus petit que θ_0 ; nous verrons plus loin que si l'on prend tout d'abord pour n une valeur osculatrice du moyen mouvement, $d\theta_0$ et θ_0 sont du même ordre de grandeur; pour cette raison, et par suite aussi de ce fait que, dans le petit diviseur $\frac{1}{\theta_0^3}$, on se sert d'une valeur bien inexacte de θ_0 , les premières approximations du calcul de dn donneront des résultats très peu précis. Nous devons donc nous attendre à calculer plusieurs fois les coefficients de la fonction perturbatrice qui sont des fonctions du demi grand axe a de l'orbite, puisqu'à chaque changement de n il faudra aussi changer a .



CHAPITRE II.

1. DÉTERMINATION DE J ET DE L'ÉPOQUE. — Après avoir transcrit toutes les formules qui seront nécessaires dans la suite, il nous reste à indiquer la marche à suivre pour déterminer les valeurs numériques des constantes introduites dans les équations (38) et (46).

Au début de ce Travail, nous avons fait de nombreux tâtonnements dus, en grande partie, à l'usage de formules incomplètes. Nous allons, aussi succinctement que possible, indiquer les méthodes employées, dans le but de montrer les difficultés rencontrées; nous verrons ensuite comment on peut diriger les calculs pour arriver aux mêmes résultats, plus simplement et plus rapidement.

Tout d'abord, pour calculer J et l'époque, nous avons cherché à quel instant Hécube et Jupiter sont en conjonction et ont une longitude héliocentrique de 170° environ. Les divers éléments de M. Schulhof, que nous donnons dans un Tableau d'ensemble, à la fin de ce Travail, avec les notations employées plus haut, indiquent, dans la longitude du périhélie d'Hécube, une variation de 6° environ, entre les années 1869 et 1894. A cela, d'ailleurs, il n'y a rien d'étonnant; nous savons, en effet, d'après les recherches de M. Tisserand, que, dans le cas actuel, l'excentricité a de très grandes perturbations; si l'on ne considère que les termes principaux, les expressions de δe et de $e \delta \varpi$ ne diffèrent qu'en ce que la première contient les arguments sous le signe cos, et la seconde sous le signe sin. L'excentricité d'Hécube passe par un maximum vers 1894; c'est donc la longitude du périhélie qui varie beaucoup dans l'intervalle de temps dont nous nous occupons.

Il résulte de là qu'on ne peut bien déterminer, dans une première approximation, l'époque et la longitude correspondante du périhélie.

Il a paru qu'on pouvait prendre pour origine :

1897 septembre 23,5, temps moyen de Paris,

et en même temps,

$$J = 166^{\circ}36'.$$

J est rapporté à l'équinoxe moyen de 1850,0; dans la suite de nos calculs, il en sera de même pour les éléments d'Hécube.

2. CALCUL DE n . — La première valeur de n a été calculée, en comparant les longitudes moyennes d'Hécube en 1869 et en 1892. Pour cette dernière année, nous avons tenu compte de la correction $+ 16'40''$, indiquée par M. Luther (*Astr. Nach.*, t. 132, p. 222). A ces deux époques, la planète était à peu près dans la même partie de son orbite; on n'avait donc pas à craindre d'erreur provenant de l'équation du centre, en déterminant n de cette façon.

Si l'on considère le premier système des éléments de M. Schulhof, donnés dans notre Tableau ou dans le Mémoire de M. Harzer, et celui qui est relatif à l'année 1892, on trouve, par un calcul simple, que la longitude moyenne d'Hécube, rapportée à l'équinoxe moyen de 1850,0, est :

184° 19' 20" pour l'époque : 1869 avril 5,5, t. m. de Berlin;

et

216° 37' 50" pour l'époque : 1892 oct. 12,0, t. m. de Berlin;

on a donc pour n

$$n = \frac{4 \times 360^\circ + 32^\circ 18' 30''}{23 \times 365 + 6 + 189,5};$$

on tire de là :

$$n = 616'',966.$$

C'est avec la valeur $n = 617''$ que nous avons calculé G_0 et les diverses fonctions de G_0 . De plus, nous avons admis qu'en réalité Hécube était à son périhélie à l'origine du temps; en d'autres termes, nous avons tout d'abord négligé B' ; nous avons fait de même pour B^2 ; nous avons aussi calculé les divers coefficients contenant la masse m' , sans tenir compte des termes en m'^2 .

3. CALCUL DES CONSTANTES D'INTÉGRATION. — Nous avons cherché à obtenir les constantes A, B, C, en comparant les valeurs de L, λ , η , ξ , fournies par les formules (38), à celles qu'on tire du Tableau des seize systèmes d'éléments osculateurs. Nous avons ainsi 64 équations linéaires en A, B, C.

En remplaçant par une seule les seize équations provenant d'un même élément, on obtenait enfin quatre équations qui, résolues par la méthode de Cauchy, nous donnaient :

$$\log A = \bar{4},85739\bar{5},$$

$$\log B = \bar{1},028600,$$

$$\log C = \bar{2},999859n.$$

Mais, lorsqu'on avait déterminé A et B en fonction de C, les quatre équations, qui définissaient cette dernière constante, étaient si peu compatibles entre

elles qu'il a paru utile de calculer A, B, C successivement au moyen des équations relatives à chacun des éléments L, λ, η, ξ.

Nous avons ainsi quatre systèmes de seize équations en A, B, C; dans chacun d'eux, nous avons groupé les équations quatre par quatre, de façon à n'en avoir que quatre à résoudre au lieu de seize. Nous avons ainsi obtenu quatre valeurs de A, B, C, que nous désignons par A_L, A_λ, A_η, A_ξ, B_L, . . . , C_ξ, et que nous transcrivons ici :

$$\begin{array}{llll} \log A_L = \bar{3},951312, & \log A_\lambda = \bar{3},549608, & \log A_\eta = \bar{1},060875, & \log A_\xi = \bar{2},311938n, \\ \log B_L = \bar{2},894580, & \log B_\lambda = \bar{2},518318. & \log B_\eta = \bar{1},538388, & \log B_\xi = \bar{1},031157, \\ & \log C_\lambda = \bar{2},045262, & \log C_\eta = 0,122181, & \log C_\xi = \bar{1},618990n. \end{array}$$

Nous voyons que B est relativement bien déterminé, si l'on compare les diverses valeurs de B à celles de A et de C. Pour savoir si les équations qui servaient à déterminer A, B, C étaient compatibles entre elles, nous avons remplacé, dans leurs premiers membres, les inconnues par les nombres donnés ci-dessus, et nous avons obtenu de forts résidus; par exemple, les quatre résidus qui concernent λ sont

$$+ 3'55'', \quad - 8'7'', \quad - 5'25'', \quad + 9'37''.$$

Dans les équations qui donnent λ, J et C entrent par leur différence J — C; si J est mal déterminé, on obtient pour C une valeur erronée, et les éléments L, λ, η, ξ, ne sont pas, tout d'abord, assez bien déterminés pour permettre une comparaison des formules aux observations et le calcul des coefficients des équations différentielles (47), (48) et (52). Devant l'impossibilité d'obtenir, dès le début, des valeurs plus approchées de J et de C, nous avons introduit une nouvelle constante additive dans l'expression de λ.

Les résultats ainsi obtenus n'ont pas été meilleurs; nous avons donc cherché à tenir compte de ce que la conjonction d'Hécube et de Jupiter n'avait pas lieu au moment du passage d'Hécube à son périhélie; au lieu d'introduire la constante B', nous avons, dans l'expression de L, λ, η, ξ, remplacé t par t + c, et calculé des valeurs approchées de c. Au premier essai, les formules ainsi transformées représentaient les diverses observations d'Hécube avec une erreur moyenne de ± 1^m30^s; l'écart maximum était de 4^m2^s, il était relatif à l'opposition de 1892; pour cette année, l'éphéméride calculée avec les éléments de M. Schulhof avait besoin des corrections suivantes :

$$\begin{array}{l} + 1^m 26^s, \\ - 11' 20''.$$

Hécube était, en ce moment, voisine de son périhélie. Cette opposition a commencé, dès lors, à attirer notre attention.

En corrigeant empiriquement les constantes, nous avons obtenu, au lieu de $4^m 2^s$, le résidu plus faible $1^m 41^s$ correspondant à l'opposition de 1892; mais, dans cette nouvelle approximation, le résidu moyen était encore de $\pm 1^m 27^s$ et le résidu maximum de $3^m 52^s$.

Quoique les derniers éléments ainsi obtenus fussent assez peu approchés, nous nous sommes décidé, devant l'impossibilité d'obtenir de meilleurs résultats, à calculer les coefficients des équations différentielles (47), (48) et (52), qui devaient nous donner dA , dB , dC , ainsi que dh et di .

Si nous n'avons pas, jusqu'alors, fait mention des constantes x_0 , i_0 des équations (46), c'est qu'on les calcule très simplement en comparant les expressions de h et de i aux nombres donnés par M. Schulhof; cette détermination ne présente aucune difficulté, et, comme nous nous sommes surtout occupé de la représentation des ascensions droites d'Hécube, il nous a suffi de calculer dx_0 , di_0 , tout à fait en dernier lieu.

Ayant enfin les équations qui nous permettaient d'obtenir des valeurs de plus en plus exactes de A, B, C, quelles que soient les premières adoptées, nous avons recommencé à calculer A, B, C, de façon à représenter les divers systèmes d'éléments osculateurs, en supposant désormais :

$$c = 0,$$

et en supprimant la constante auxiliaire introduite dans l'expression de λ .

Avant de parler de ces recherches, nous croyons utile de donner le Tableau des observations qui nous ont servi dans ce Travail. Autant que cela nous a été possible, nous avons choisi, pour chaque opposition d'Hécube, plusieurs observations faites le même jour, et nous avons calculé une observation fictive qui les remplace toutes. En raison de la grandeur des différences entre la théorie et l'observation, nous n'avons jugé utile, à aucun moment, de calculer des lieux normaux pour les différentes oppositions.

La première colonne du Tableau suivant contient la date de l'observation; la seconde, l'heure, exprimée en temps moyen de Paris, et diminuée du temps d'aberration; les deux suivantes renferment l'ascension droite et la déclinaison rapportées à l'équinoxe moyen du début de l'année où a été faite l'observation; enfin, les dernières donnent les lieux d'observation et les publications où nous avons pris les positions d'Hécube.

Dates.	T. m. de Paris — t. d'aberr.	\mathcal{R} moy.	δ moy.	Lieux d'observ.	Publ.
1869. Avril 6	9. 3. 49 ^{h m s}	12. 3. 12,18 ^{h m s}	— 2. 10. 26,5 ^o	Leipzig	<i>A.N.</i> t. 74, p. 231
				Berlin	» t. 81, p. 91
1871. Sept. 15	8. 57. 26	22. 30. 35,98	— 10. 44. 42,8	Vienne	» t. 79, p. 345
				Berlin	» t. 81, p. 91
1874. Janv. 11	7. 52. 40	7. 47. 48,37	26. 50. 39,8	Berlin	» t. 84, p. 251
				Pola	» t. 85, p. 105
				Düsseldorf. . .	» t. 86, p. 65
1875. Avril 11	13. 16. 42	13. 44. 16,47	— 14. 50. 51,0	Leipzig	» t. 86, p. 193
				Berlin	» t. 88, p. 35
1876. Juill. 14	10. 39. 52	19. 27. 44,06	— 27. 33. 35,6	Leipzig	» t. 89, p. 353
1877. Sept. 2	12. 37. 53	23. 42. 43,06	— 2. 0. 32,6	Berlin	» t. 94, p. 263
1878. Nov. 16	8. 11. 39	3. 28. 3,92	24. 38. 1,0	Leipzig	» t. 94, p. 163
1880. Févr. 1	8. 35. 30	9. 23. 59,47	19. 25. 54,6	Düsseldorf. . .	» t. 97, p. 259
				Pola	» t. 98, p. 129
1881. Mai 19	9. 37. 53	15. 3. 50,87	— 23. 17. 46,3	Vienne	» t. 102, p. 281
1886. Janv. 31	9. 19. 16	11. 10. 4,36	7. 26. 4,7	Rome	» t. 116, p. 103
1888. Août 3	12. 7. 52	21. 52. 22,24	— 16. 18. 29,9	Hambourg . . .	» t. 127, p. 59
1889. Oct. 15	7. 30. 4	1. 19. 56,97	11. 48. 36,0	Vienne	» t. 125, p. 257
				Hambourg . . .	» t. 131, p. 93
1892. Mars 24	11. 15. 46	12. 20. 42,67	— 3. 56. 42,5	Düsseldorf. . .	» t. 132, p. 217
				Rome	<i>A.N.</i> t. 133, p. 241
1894. Août 8	10. 16. 25	22. 55. 14,50	— 8. 52. 40,2	Nice	<i>B.A.</i> t. 12, p. 33

4. PREMIERS ESSAIS. — Avec la valeur de n ,

$$n = 617'',$$

les valeurs de A, B, C, qui nous ont paru les plus probables, sont définies ainsi qu'il suit :

$$\log A = \bar{2},386554,$$

$$\log B = \bar{2},966525,$$

$$\log C = \bar{1},020845.$$

Les observations étaient ainsi représentées avec des erreurs comprises entre -29^m et $+27^m$ en ascension droite. En calculant dA, dB, dC, dJ, dn , on trouvait, entre autres valeurs,

$$dn = -16'',9;$$

étant donné ce résultat, nous avons négligé de corriger n ; à l'approximation suivante, les résidus étaient compris entre -4^m32^s et $+1^m26^s$, et les nouvelles déterminations de A, B, C, J étaient :

$$\log A = \bar{2},058300,$$

$$\log B = \bar{2},998600,$$

$$\log C = \bar{2},736356,$$

$$J = 170^{\circ}36'.$$

A ces nombres correspondaient, pour les quatorze oppositions considérées plus haut, les différences (O — C) entre l'observation et le calcul, que nous donnons ci-dessous :

Dates.	O — C.		Dates.	O — C.
1869...	— 0. ^m 4 ^s		1880...	+ 0. ^m 53 ^s
1871...	— 1.31		1881...	+ 1.32
1874...	— 0.24		1886...	+ 0.25
$n = 617^r$; 1875...	+ 0.38		1888...	+ 0.14
1876...	— 0.10		1889...	— 0.13
1877...	— 0.35		1892...	— 0.37
1878...	— 0.27		1894...	— 0.8

Comme ces résidus étaient faibles relativement aux précédents, nous avons de nouveau calculé les équations différentielles qui nous ont donné dA , dB , dC , dJ , dn , dt . Remarquons, à cette occasion, que ces six quantités sont définies par quatorze équations linéaires; c'est toujours à la méthode de Cauchy qu'on a eu recours pour les résoudre.

Dans le cas actuel, elles nous ont fourni :

$$\begin{aligned} \log A &= \bar{2},044\,045n, \\ \log B &= \bar{2},991\,627, \\ \log C &= \bar{1},058\,007, \\ J &= 170^\circ 13', \\ n &= 606^r,793, \\ \text{époque} &= 1897 \text{ septembre } 2,5. \end{aligned}$$

A l'aide de ces données, tous les calculs ont été repris; en raison du grand changement de n , la première approximation nous a conduit à des résidus compris entre $+19^m 47^s$ et $-4^m 22^s$; il a fallu deux approximations pour arriver à ceux que nous transcrivons ici :

Dates.	O — C.		Dates.	O — C.
1869...	+ 0. ^m 4 ^s		1880...	+ 0.16
1871...	+ 0.51		1881...	— 0.26
1874...	+ 1.5		1886...	— 1.43
$n = 606^r,793$; 1875...	— 1.7		1888...	+ 1.58
1876...	— 0.2		1889...	+ 2.27
1877...	+ 0.27		1892...	— 2.5
1878...	+ 1.24		1894...	+ 3.25

Un nouveau calcul de dA , dB , dC , dJ , dn nous a conduit aux nombres sui-

vants :

$$\log A = \bar{2},088882n,$$

$$\log B = \bar{2},950715,$$

$$\log C = \bar{2},603008,$$

$$J = 166^{\circ}43',$$

$$n = 609^{\circ},394.$$

On a repris encore une fois tous les calculs; la première approximation a fourni des résidus compris entre $+ 4^m 1^s$ et $- 3^m 37^s$; la seconde a donné :

$$\log A = \bar{3},980975n,$$

$$\log B = \bar{2},946375,$$

$$\log C = \bar{2},757121,$$

$$J = 167^{\circ}27'.$$

A ces constantes correspondent les résidus du Tableau suivant, dans lequel nous donnons aussi les valeurs approchées, obtenues pour la longitude moyenne et la longitude du périhélie, aux instants des observations dont nous faisons usage.

Dates.	λ .	$g + h$.	O — C.
1869.....	184.13'	174.6'	+ 1. 1 ^m
1871.....	337. 0	173.27	— 0. 6
1874.....	122.22	172.49	— 0.15
1875.....	200.27	172.29	+ 0.14
1876.....	279.25	172. 9	+ 0. 7
1877.....	350.30	171.51	— 0.11
$n = 609^{\circ},394$; 1878.....	65.51	171.31	— 0.25
1880.....	141.36	171.11	— 0.11
1881.....	222.43	170.49	+ 0.28
1886.....	157.13	169.32	— 0.55
1888.....	314.20	168.50	+ 0.16
1889.....	29.23	168.33	— 0. 8
1892.....	182.13	167.53	— 1.45
1894.....	330.55	167.13	+ 0.17

Nous croyons inutile de transcrire les log de e qui sont tous compris entre

$$\bar{2},994901 \text{ et } \bar{1},014326.$$

Les calculs d'approximation suivants donnent

$$\partial n = 0;$$

de plus, les changements qu'on obtient pour A, B, C, J ne conduisent pas à des résultats meilleurs; le résidu moyen reste, comme ci-dessus, de 27^s environ.

Considérons, dans le Tableau précédent, les résidus les plus importants, les dates et les anomalies moyennes correspondantes, nous avons :

Dates.	Résidus.	Anomalies moyennes.
1869	+1.45 ^{m s}	10. 3'
1886	-0.55	-12. 19
1892	-1.45	14. 20

Il nous a paru résulter de ces nombres que la détermination du périhélie et de l'excentricité était tout à fait insuffisante; nous rappelant la remarque de M. Harzer (1) sur la détermination du mouvement des apsides, nous avons désormais considéré les termes du deuxième ordre par rapport à la masse dans les équations (20), tout en négligeant encore B' et B².

5. SECONDS ESSAIS. — Comme la valeur de n ,

$$n = 609', 394,$$

avait paru la plus probable dans l'approximation précédente, nous l'avons encore choisie pour les calculs suivants.

Après quelques approximations, nous avons obtenu, pour A, B, C, J,

$$\left. \begin{array}{l} \log A = \bar{3},985378n \\ \log B = \bar{2},934801 \\ \log C = \bar{2},870987 \\ J = 167^{\circ}24' \end{array} \right\} \text{époque 1897 sept. 23,5, temps moyen de Paris.}$$

A ce système de valeurs, peu différent du dernier que nous avons transcrit plus haut, correspondaient les résidus suivants, que nous donnons, ainsi que nous l'avons déjà fait, en même temps que les longitudes moyennes de la planète et celles de son périhélie :

Dates.	λ .	$g + h$.	O - C.	Dates.	λ .	$g + h$.	O - C.
1869...	184.16'	173.26'	- 0. 2 ^{m s}	1880...	141.34'	171.18'	+ 0.42 ^{m s}
1871...	337. 1	173. 0	+ 0.16	1881...	222.40	171. 1	+ 0. 6
1874...	122.22	172.34	- 0.16	1886...	157.10	169.59	+ 0.16
1875...	200.27	172.18	- 0. 4	1888...	314.16	169.24	- 0.19
1876...	279.24	172. 3	- 0. 8	1889...	29.18	169. 8	+ 0.24
1877...	350.29	171.48	- 0. 1	1892...	182. 8	168.34	- 0.45
1878...	65.49	171.34	+ 0.18	1894...	330.49	168. 0	+ 0.20

(1) HARZER, *Quelques remarques* ...; p. 11, on lit : « Pour donner une notion de l'influence des termes de second ordre par rapport à la masse, j'allègue que, pour le mouvement ζ des apsides, j'ai obtenu à peu près 68 pour 100 de la valeur complète des termes du second ordre, 32 pour 100 des termes du premier ordre par rapport à la masse troublante. »

Le plus grand résidu était encore relatif à l'année 1892.

Nous avons fait ensuite de nombreux essais dans lesquels nous tenions compte des divers termes du deuxième ordre par rapport à la masse qui, tout d'abord, avaient paru négligeables. Dans aucun cas, les résidus n'ont été inférieurs à ceux du dernier Tableau. Nous avons alors cherché empiriquement quelles corrections il fallait appliquer à certains coefficients, g_0 , θ_{11} , par exemple, pour rendre nos formules plus précises. En face de résultats systématiquement négatifs, ou tout au moins illusoire, nous avons acquis la conviction que l'importance des résidus était due, en grande partie du moins, à ce que les formules employées étaient incomplètes; nous avons donc tenu compte des nouveaux termes que des calculs plus approchés semblaient devoir introduire dans les expressions de L , λ , η , ξ , et nous avons déterminé empiriquement leurs coefficients.

En ajoutant aux seconds membres des formules qui donnent η et ξ un terme en $\frac{\sin}{\cos} [J - (3\theta_0 - g_0)t]$, dont le coefficient avait pour $\log \bar{3}, 500000n$, nous sommes enfin arrivé aux résidus suivants :

Dates.	O - C.		Dates.	O - C.
1869...	+ 0. 3 ^{m s}		1880...	- 0. 2 ^{m s}
1871...	- 0. 5		1881...	+ 0. 29
1874...	- 0. 20		1886...	- 0. 10
1875...	- 0. 6		1888...	+ 0. 9
1876...	- 0. 4		1889...	- 0. 16
1877...	- 0. 9		1892...	- 0. 22
1878...	- 0. 14		1894...	+ 0. 24

En présence de ces résultats, suivant les conseils de MM. Poincaré et Tisserand, nous avons tenu compte des termes qui ont l'un ou l'autre des coefficients B^2 ou B' , et nous avons recommencé les calculs, en adoptant la première valeur choisie tout d'abord pour n , à savoir :

$$n = 617^r, 000.$$

On peut constater, en effet, que le nombre $609^r, 394$ est bien différent de ceux qu'a donnés M. Schulhof et que, dans nos premiers essais, aux deux valeurs de n ,

$$n = 617^r, 000 \quad \text{et} \quad n = 609^r, 394,$$

correspondaient des résidus tout à fait comparables.

Pour nous rendre compte de ces grandes variations de n , qui sont absolument du même ordre que $n - 2n'$, ($n' = 299^r, 128$), reportons-nous à l'expression de

la longitude moyenne, où n et A entrent par l'expression $(n + A)t$. Il en résulte qu'après avoir calculé δA la détermination de δn est peu précise par suite de la petitesse des coefficients ; les expressions numériques montrent en effet que, après avoir remplacé δA , δB , ... par leurs valeurs en fonction de δn et des termes connus, la somme des coefficients de δn n'est plus que $\frac{1}{1000}$ de ce qu'elle était dans les équations primitives. Au contraire, les termes connus ($O - C$) restent encore assez grands pour que, dans certains cas, on obtienne pour n des variations de plusieurs secondes d'arc. Nous n'avons, en général, corrigé n , que s'il en résultait une diminution sensible des résidus. Même dans ce cas, les calculs directs nous ont prouvé que la variation δn , donnée par la résolution des équations en δA , δB , δC , ... , était quelquefois illusoire ; nous n'avons pas cru utile de parler de ces recherches. Ceci provenait, sans aucun doute, de ce que les coefficients de δA , δB , ... et surtout ceux de δn contenaient des valeurs inexacts de A , B , ... , n , et que la grandeur des résidus ne tenait pas tant à l'inexactitude de A , B , ... , n , qu'à l'insuffisance des formules dont nous avons tiré les expressions de L , λ , η , ξ .

Les mêmes remarques s'appliquent au calcul de l'époque ; si l'on détermine d'abord δC et ensuite δt , la somme des coefficients de δt est réduite à $\frac{1}{200}$ de ce qu'elle était tout d'abord ; aussi n'avons-nous pas indiqué les multiples changements de l'époque auxquels nous ont conduit les équations en δA , δB , ...

6. DERNIERS ESSAIS. — Nous sommes donc revenu encore à la première valeur adoptée pour n ,

$$n = 617',000,$$

d'où

$$\log G_0 = 0,841366,$$

et nous n'avons plus négligé les termes des équations (38) contenant l'un des facteurs B^2 ou B' .

Pour avoir à très peu près A , B , C , B' , J , nous avons supposé

$$J = 166^\circ 36',$$

et calculé A , B , C , B' , en écrivant que les équations (38) donnaient, pour 1869 et 1892, les longitudes moyennes, les excentricités et les longitudes du périhélie obtenues dans les derniers essais dont nous venons de parler ; il résultait de là pour J une nouvelle détermination ; un second calcul suffisait pour avoir A , B , C , B' , J .

Après quelques approximations, nous avons trouvé

$$\delta n = -3',2;$$

pour voir si cette correction était bien admissible, nous avons diminué n d'une quantité inférieure à 3".

Il était plus simple de corriger d'abord G_0 et n ensuite; nous avons donc pris :

$$\begin{aligned} \log G_0 &= 0,841800, \\ n &= 615'',223. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles constantes et les mêmes formules que dans l'essai précédent, nous avons trouvé

$$\delta n = -1'',4.$$

Il résultait de là que, si nous appliquions encore à n la correction $-1'',4$, la troisième approximation correspondrait à la valeur exacte de n .

Nous avons donc adopté les nombres suivants :

$$\begin{aligned} \log G_0 &= 0,842200, \\ n &= 613'',574, \end{aligned}$$

nous n'avons plus trouvé désormais pour δn aucune valeur sensible. C'est donc avec ces nombres que nous avons repris définitivement tous les calculs.

7. SIMPLIFICATIONS POSSIBLES. — Avant d'arriver aux calculs numériques définitifs, faisons quelques remarques sur ces essais successifs. On voit qu'il y a des difficultés à déterminer la valeur moyenne de n , lorsqu'on n'en connaît que des valeurs oscultrices; ces recherches sont encore pénibles dès qu'on fait usage des formules plus complètes qui renferment le petit diviseur d'une façon plus compliquée. Les calculs successifs des coefficients de Laplace et des diverses fonctions du demi grand axe, que nous avons introduites dans nos formules, sont eux-mêmes assez longs. Il serait donc utile de diminuer le nombre des tâtonnements. Il semble qu'on pourrait y arriver de la manière suivante :

Si l'on suppose que la valeur adoptée pour G_0 n'est pas trop éloignée de la vérité, dans les expressions de L et de λ , les termes A et $A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} t$ sont peu importants et, par suite, le moyen mouvement osculateur au temps t , est à peu près égal à

$$n + B\theta_0(\theta_{11} - g_{11}) \cos \theta_0 t - B'\theta_0(\theta_{11} - g_{11}) \sin \theta_0 t;$$

cette quantité, obtenue en formant $\frac{d\lambda}{dt}$, se simplifie beaucoup dans le cas actuel; nous savons, en effet, que B' est petit par rapport à B , que t est nul en 1897. Si

nous considérons les derniers éléments de M. Schulhof, relatifs à l'année 1894, où nous voyons que la valeur osculatrice du moyen mouvement est, à cette époque,

$$n = 617',8,$$

nous obtenons, pour la valeur moyenne de n , l'équation

$$n + B\theta_0(\theta_{11} - g_{11}) = 617,8,$$

ou, en remplaçant $\theta_{11} - g_{11}$ par sa partie principale,

$$n + \frac{3BM_2}{(n - 2n')G_0^{\frac{1}{2}}} = 617,8.$$

Si l'on adopte pour B et G_0 les derniers nombres fournis par nos approximations, on trouve

$$n + \frac{74,5}{n - 2n'} = 617,8,$$

d'où

$$n = 612',7.$$

Ce nombre diffère de moins de 1" de celui que nous avons choisi pour les calculs définitifs. Comme toutes les valeurs de B ont constamment peu différé entre elles, que d'ailleurs B est à peu près égal à l'excentricité, on voit qu'on peut obtenir, dès le début ou après un premier essai, une valeur très approchée de n .

Le calcul de A , B , B' , C , J peut aussi se faire rapidement, en adoptant la méthode qui nous a servi dans nos derniers essais.

Enfin nous aurions pu tout de suite obtenir, avec une approximation suffisante, les coefficients des équations qui définissent δA , δB , ..., en nous servant des systèmes d'éléments osculateurs de M. Schulhof.

8. POSSIBILITÉ D'UNE COMMENSURABILITÉ EXACTE. — Si nous appliquons ces remarques au cas d'un astéroïde pour lequel la commensurabilité serait plus approchée que pour Hécube, nous allons voir que le moyen mouvement osculateur peut, à un moment donné, être exactement le double du moyen mouvement de Jupiter.

En effet, pour une planète dont l'orbite a une excentricité peu différente de celle d'Hécube, on peut considérer que le coefficient

$$\frac{3BM_2}{G_0^{\frac{1}{2}}},$$

est égal à 74,5, comme plus haut; si nous écrivons

$$n \pm \frac{74,5}{n - 2n'} = 2n',$$

nous trouvons que n est égal à l'un des deux nombres

$$606^{\circ},8 \quad \text{ou} \quad 589^{\circ},6.$$

Si donc il existe des astéroïdes pour lesquels la valeur moyenne de n est comprise entre les deux nombres précédents, il peut arriver que le moyen mouvement osculateur soit successivement supérieur, égal et inférieur à $2n'$, surtout si l'excentricité de l'orbite n'est pas trop petite.

Il peut donc y avoir commensurabilité exacte, sans qu'il y ait rien à changer aux formules données; ce cas n'est pas plus spécial que celui que nous étudions.

9. CALCUL DES COEFFICIENTS. — Nous arrivons enfin aux calculs numériques des divers coefficients dont nous avons parlé dans le Chapitre I. Nous nous bornons à donner ceux qui sont relatifs à la dernière approximation.

Nous avons constamment employé les logarithmes à six décimales, et fréquemment fait usage des logarithmes d'addition et de soustraction. Dans la suite, au lieu des valeurs des quantités que nous avons calculées, nous donnerons leurs logarithmes, ce que nous indiquerons en mettant ces derniers entre crochets. De la valeur

$$G_0 = [0,842200],$$

on déduit :

$$a = [1,684400],$$

$$a' = [1,892516],$$

$$\alpha = \frac{a}{a'} = [1,791884].$$

C'est avec cette valeur de α que nous avons calculé $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, ..., $b^{(3)}$ et leurs quatre premières dérivées par rapport à α . Pour cela, nous nous sommes surtout servi des formules données par M. Tisserand (1).

Pour avoir $b^{(0)}$, nous avons eu d'abord recours à son expression donnée par Le Verrier (2). On obtient aussi $b^{(0)}$ très rapidement à l'aide d'une méthode dont s'est servi M. Harzer, en prenant la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{1 - \alpha^2}$.

(1) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, Chap. XVII.

(2) LE VERRIER, *Annales de l'Observatoire*, t. II, addition au Chap. V, p. [2].

Si, en effet, on forme successivement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres m et n , qu'on opère de même sur les deux nombres ainsi obtenus m_1 et n_1 , et ainsi de suite, on obtient deux séries de nombres qui ont une limite commune μ et l'on a, d'après la transformation de Landen,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{m_1^2 \cos^2 \varphi_1 + n_1^2 \sin^2 \varphi_1}} = \dots = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Dans le cas actuel, μ désignant encore la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{1 - \alpha^2}$, nous avons

$$b^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - \alpha^2) \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\mu}.$$

Le calcul de $b^{(0)}$, par cette méthode, est très rapide et très simple, surtout si l'on se sert des logarithmes d'addition.

Nous avons employé chacun de ces procédés pour obtenir $b^{(0)}$. Après avoir déterminé, à l'aide des formules indiquées plus haut, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, $b^{(4)}$ et $b^{(5)}$, nous avons, pour vérifier ces calculs, employé les quadratures, comme l'avait fait M. Harzer, pour obtenir la valeur de $b^{(5)}$.

L'expression de $b^{(5)}$ est

$$b^{(5)} = \frac{4\alpha^5}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Si l'on pose

$$f(\varphi) = \frac{\sin^{10} \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}},$$

on voit aisément que $b^{(5)}$ est compris entre les quantités suivantes :

$$[f(5^\circ) + f(15^\circ) + \dots + f(85^\circ)] \frac{144000 \sin^{10} \alpha^5}{\pi}$$

et

$$\left[f(10^\circ) + f(20^\circ) + \dots + f(80^\circ) + \frac{1}{2} f(90^\circ) \right] \frac{144000 \sin^{10} \alpha^5}{\pi}.$$

Il suffit de partager de 10° en 10° l'intervalle compris entre 0° et 90° , pour obtenir deux expressions assez approchées de $b^{(5)}$, si l'on se contente des logarithmes à six décimales.

Ensuite, les diverses dérivées $\frac{d^k b^{(i)}}{d\alpha^k}$ ont été calculées comme nous l'avons dit plus haut; pour $k = 4$, nous avons vérifié les résultats au moyen des formules de Le Verrier, analogues à celle d'où nous avons tiré $b^{(0)}$.

C'est ainsi que nous sommes arrivé aux nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 b^{(0)} = [0, 351961], & b^{(1)} = [\bar{1}, 868235], & b^{(2)} = [\bar{1}, 544062], \\
 \frac{db^{(0)}}{dx} = [0, 025882], & \frac{db^{(1)}}{dx} = [0, 233998], & \frac{db^{(2)}}{dx} = [0, 148503], \\
 \frac{d^2 b^{(0)}}{dx^2} = [0, 609189], & \frac{d^2 b^{(1)}}{dx^2} = [0, 579601], & \frac{d^2 b^{(2)}}{dx^2} = [0, 678808], \\
 \frac{d^3 b^{(0)}}{dx^3} = [1, 325271], & \frac{d^3 b^{(1)}}{dx^3} = [1, 340096], & \frac{d^3 b^{(2)}}{dx^3} = [1, 344727], \\
 \frac{d^4 b^{(0)}}{dx^4} = [2, 236965], & \frac{d^4 b^{(1)}}{dx^4} = [2, 237184], & \frac{d^4 b^{(2)}}{dx^4} = [2, 248004], \\
 \\
 b^{(3)} = [\bar{1}, 261377], & b^{(4)} = [\bar{2}, 998116], & b^{(5)} = [\bar{2}, 746180], \\
 \frac{db^{(3)}}{dx} = [0, 015946], & \frac{db^{(4)}}{dx} = [\bar{1}, 863030], & \frac{db^{(5)}}{dx} = [\bar{1}, 698583], \\
 \frac{d^2 b^{(3)}}{dx^2} = [0, 698022], & \frac{d^2 b^{(4)}}{dx^2} = [0, 663050], & \frac{d^2 b^{(5)}}{dx^2} = [0, 593397], \\
 \frac{d^3 b^{(3)}}{dx^3} = [1, 398150], & \frac{d^3 b^{(4)}}{dx^3} = [1, 440209], & \frac{d^3 b^{(5)}}{dx^3} = [1, 451901], \\
 \frac{d^4 b^{(3)}}{dx^4} = [2, 259959], & \frac{d^4 b^{(4)}}{dx^4} = [2, 293005], & \frac{d^4 b^{(5)}}{dx^4} = [2, 332650].
 \end{array}$$

On en déduit pour les expressions de $A_i^{(h)}$:

$$\begin{array}{lll}
 A^{(0)} = [\bar{2}, 459445], & A^{(1)} = [\bar{3}, 975719], & A^{(2)} = [\bar{3}, 651546], \\
 A_1^{(0)} = [\bar{3}, 925250], & A_1^{(1)} = [\bar{2}, 133366], & A_1^{(2)} = [\bar{2}, 047871], \\
 A_2^{(0)} = [\bar{3}, 999411], & A_2^{(1)} = [\bar{3}, 969823], & A_2^{(2)} = [\bar{2}, 069030], \\
 A_3^{(0)} = [\bar{2}, 030256], & A_3^{(1)} = [\bar{2}, 045081], & A_3^{(2)} = [\bar{2}, 049712], \\
 A_4^{(0)} = [\bar{2}, 131774], & A_4^{(1)} = [\bar{2}, 131993], & A_4^{(2)} = [\bar{2}, 142812], \\
 \\
 A^{(3)} = [\bar{3}, 368861], & A^{(4)} = [\bar{3}, 105600], & A^{(5)} = [\bar{4}, 853664], \\
 A_1^{(3)} = [\bar{3}, 915314], & A_1^{(4)} = [\bar{3}, 762398], & A_1^{(5)} = [\bar{3}, 597951], \\
 A_2^{(3)} = [\bar{2}, 088244], & A_2^{(4)} = [\bar{2}, 053272], & A_2^{(5)} = [\bar{3}, 983619], \\
 A_3^{(3)} = [\bar{2}, 103135], & A_3^{(4)} = [\bar{2}, 145194], & A_3^{(5)} = [\bar{2}, 156886], \\
 A_4^{(3)} = [\bar{2}, 154768], & A_4^{(4)} = [\bar{2}, 187814], & A_4^{(5)} = [\bar{2}, 227459].
 \end{array}$$

Pour les calculs de h et de i , nous avons eu besoin de $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$; ces quantités sont données ci-dessous :

$$\begin{array}{ll}
 c^{(1)} = [0, 666604], & B^{(1)} = [\bar{2}, 565972], \\
 c^{(2)} = [0, 376617], & B^{(2)} = [\bar{2}, 275987].
 \end{array}$$

Les valeurs des expressions désignées par M_i et de leurs dérivées premières

et secondes, M'_i, M''_i , faciles à calculer en fonction de $A_i^{(k)}$, sont :

$M_0 = [\bar{5}, 138372],$	$M'_0 = [\bar{8}, 919777],$	$M''_0 = [\bar{9}, 610568],$
$M_1 = [\bar{6}, 642839],$	$M'_1 = [7, 599451],$	$M''_1 = [\bar{8}, 627609],$
$M_2 = [\bar{5}, 142765],$	$M'_2 = [7, 893648],$	$M''_2 = [\bar{8}, 628085],$
$M_3 = [\bar{5}, 280252].$	$M'_3 = [\bar{6}, 285220],$	$M''_3 = [7, 258509],$
$M_4 = [\bar{6}, 689075],$	$M'_4 = [7, 610571],$	$M''_4 = [\bar{8}, 513841].$
$M_5 = [\bar{5}, 754297],$	$M'_5 = [\bar{6}, 661499],$	
$M_6 = [\bar{6}, 808200]_n,$	$M'_6 = [7, 843310]_n,$	
$M_7 = [\bar{5}, 244899],$		
$M_8 = [\bar{6}, 954914],$		

On a adopté, pour la masse de Jupiter, $m' = \frac{1}{1047,232}$, nombre obtenu par M. Schur et considéré par M. Tisserand comme le plus probable. (Voir *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1889, p. 682.)

Avec ces données, on obtient aisément $\theta_0, \theta_1, \dots, e_1, e_2, \dots, g_0, g_1, \dots$

Dans l'expression de θ_0 , nous avons le petit terme du second ordre par rapport aux masses,

$$\frac{9\alpha_2^2}{4G_0^2} \quad \text{ou} \quad \frac{9M_2^2}{4\theta_0^2 G_0^2};$$

la présence de ce terme nécessite, dans le calcul de θ_0 , des approximations assez nombreuses, à la vérité, mais très rapides à effectuer.

En ce qui concerne g_0 , remarquons que, des deux termes qui le composent, le premier, qui est du premier ordre par rapport à la masse, a pour logarithme

$$\bar{6}, 101669,$$

et le second, qui est du second ordre, a pour logarithme

$$\bar{6}, 461733.$$

$\frac{\partial \theta_0}{\partial G_0}, \frac{\partial g_0}{\partial G_0}$ et $\frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0}$ s'obtiennent simplement en dérivant $\theta_0, g_0, \theta_0 - g_0$, par rapport à G_0 .

Pour calculer $\frac{\partial e_{11}}{\partial G_0}$, nous nous sommes contenté, dans les équations (23), de prendre pour θ_{11} , la valeur principale donnée par les équations (19), et de même pour e_{21} ; alors e_{11} est donné par l'expression

$$(1 + 3\alpha_3)e_{11} + \frac{3\alpha_2^2}{4\theta_0 G_0^2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{2} - \alpha_2 = 0.$$

C'est de là que l'on tire $\frac{\partial e_{11}}{\partial G_0}$. Le calcul direct de cette quantité peut se faire en dérivant toutes les équations (23); il est beaucoup plus long que le précédent, et nous avons vérifié que les résultats donnés par ces deux procédés diffèrent assez peu, pour qu'on pût se contenter du premier.

Dans le calcul de A_1 , B_1 , C_1 , on a pris, pour l'excentricité de l'orbite de Jupiter,

$$e' = 0,0482519,$$

adoptée dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Nous avons ainsi les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= [5,894446], \\ \theta_0 - g_0 &= [5,870779], \\ g_0 &= [6,619022].\end{aligned}$$

Les expressions de θ_0 , $\theta_0 - g_0$, g_0 , en secondes d'arc, sont :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 16,176, \\ \theta_0 - g_0 &= 15,318, \\ g_0 &= 0,858;\end{aligned}$$

d'où

$$u = \theta_0 - g_0 + 2n' = 613',574;$$

ensuite nous obtenons :

$$\begin{array}{llll} e_{11} = [2,363147], & \frac{\partial \theta_0}{\partial G_0} = [3,061299]_n, & g_{11} = [0,041846], & A_1 = [3,168067]_n, \\ e_{12} = [0,035995]_n, & \frac{\partial g_0}{\partial G_0} = [5,948915], & g_{22} = [1,329878]_n, & B_1 = [2,394896]_n, \\ e_{21} = [3,202754]_n, & \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} = [3,093595]_n, & \theta_{11} - g_{11} = [0,439592], & C_1 = [2,662963]. \\ \theta_{22} = [1,960432]_n, & \frac{\partial e_{11}}{\partial G_0} = [1,484794], & \theta_{22} - g_{22} = [1,844591]_n, & \\ \theta_{11} = [0,585775], & & e_{22} = [2,908577]_n, & \end{array}$$

Les dernières déterminations de A , B , B' , C , J , sont :

$$\begin{aligned}A &= [2,529323], \\ B &= [2,988701], \\ B' &= [2,023348], \\ C &= [3,338373], \\ J &= 165^\circ 51',\end{aligned}$$

époque : 1897 sept. 23,5, t. m. de Paris.

De même pour les constantes x_0, i_0 , introduites dans les équations qui définissent l'inclinaison et le nœud, on a

$$\begin{aligned} x_0 &= 354^{\circ}43', \\ i_0 &= 4^{\circ}22'3". \end{aligned}$$

Les coefficients numériques des équations différentielles qui permettent de trouver des valeurs, de plus en plus approchées, de ces constantes seront donnés plus loin.

Transcrivons d'abord les expressions des éléments de l'orbite d'Hécube, en rappelant qu'on a les relations

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a}, \\ \lambda &= l + g + h, \\ \eta &= \sqrt{L} e \sin(g + h), \\ \xi &= \sqrt{L} e \cos(g + h), \end{aligned}$$

et que l'unité de longueur a été choisie de façon que la constante de Gauss soit égale à l'unité.

$$\text{Éléments osculateurs d'Hécube: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Équinoxe moyen : 1850,0.} \\ \text{Époque : 1897 sept. 23,5, t. m. de Paris.} \\ t \text{ est compté en jours moyens.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} L &= [0,842250] - [\bar{2},194048] \cos(16^{\circ}, 176t) + [\bar{3},228695] \sin(16^{\circ}, 176t) \\ &\quad - [\bar{3},168067] \cos(153^{\circ}56' - 15^{\circ}, 318t) + \text{termes périodiques,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 165^{\circ}43'30'' + 613'',6536t + [4,742718] \sin(16^{\circ}, 176t) + [3,777365] \cos(16^{\circ}, 176t) \\ &\quad - [3,136418] \sin(32^{\circ}, 352t) - [2,472095] \cos(32^{\circ}, 352t) \\ &\quad - [3,709321] \sin(153^{\circ}56' - 15^{\circ}, 318t) + \text{termes périodiques,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= [\bar{2},785616] \sin(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) - [\bar{8},371100] t \cos(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) \\ &\quad + [\bar{4},122620] \cos(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) + [\bar{1},409801] \sin(165^{\circ}51' + 0^{\circ}, 858t) \\ &\quad + [\bar{2},444448] \cos(165^{\circ}51' + 0^{\circ}, 858t) - [\bar{4},612555] \sin(165^{\circ}51' - 31^{\circ}, 494t) \\ &\quad - [\bar{3},307079] \sin(165^{\circ}51' - 47^{\circ}, 670t) + [\bar{3},977860] + \text{termes périodiques,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= [\bar{2},785616] \cos(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) + [\bar{8},371100] t \sin(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) \\ &\quad - [\bar{4},122620] \sin(165^{\circ}51' - 15^{\circ}, 318t) + [\bar{1},409801] \cos(165^{\circ}51' + 0^{\circ}, 858t) \\ &\quad - [\bar{2},444448] \sin(165^{\circ}51' + 0^{\circ}, 858t) - [\bar{4},612555] \cos(165^{\circ}51' - 31^{\circ}, 494t) \\ &\quad - [\bar{3},307079] \cos(165^{\circ}51' - 47^{\circ}, 670t) + [\bar{2},653501] + \text{termes périodiques,} \end{aligned}$$

$$\text{tang}(h - 165^{\circ}51' + 15^{\circ}, 318t) = [0,003648] \text{tang} \left\{ [\bar{1},992930] (188^{\circ}52' + 15^{\circ}, 318t) \right\},$$

$$\sin i = [\bar{2},881700] \left\{ [\bar{1},992944] + [\bar{3},917238] \cos(17^{\circ}44' + 30^{\circ}, 636t) \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Avant de transcrire les expressions numériques des perturbations pério-

diqués, il nous semble utile, pour les calculs pratiques, de grouper les termes des formules précédentes qui correspondent au même argument placé sous le signe sin ou cos. En outre, pour la commodité des applications, nous revenons à l'unité de longueur ordinaire et aux notations généralement employées dans les calculs d'orbites. Enfin, nous transformons un peu les relations compliquées qui donnent ci-dessus h et i .

Nous obtenons ainsi les formules plus simples que voici :

$$\text{Éléments osculateurs d'Hécube : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Équinoxe moyen : 1850,0.} \\ \text{Époque : 1897 sept. 23,5, t. m. de Paris.} \\ t : \text{exprimé en jours moyens.} \\ \text{Unité de longueur : distance moyenne de la Terre au Soleil.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= [0,254110] - [3,608441] \cos(6^\circ 10' 53'' + 16'', 176t) - [4,579927] \cos(153^\circ 56' - 15'', 318t) + t. p., \\ \lambda &= 165^\circ 43' 30'' + 613'', 6536t + [4,745251] \sin(6^\circ 10' 53'' + 16'', 176t) \\ &\quad - [3,146375] \sin(12^\circ 13' 19'' + 32'', 352t) - [3,709321] \sin(153^\circ 56' - 15'', 318t) + t. p., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} e \sin(g+h) &= [\bar{2},491546] \sin(165^\circ 58' 27'' - 15'', 318t) - [8,077030] t \cos(165^\circ 51' - 15'', 318t) \\ &\quad + [1,118264] \sin(172^\circ 1' 53'' + 0'', 858t) - [4,318485] \sin(165^\circ 51' - 31'', 494t) \\ &\quad - [3,013009] \sin(165^\circ 51' - 47'', 670t) + [3,683790] + t. p., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} e \cos(g+h) &= [\bar{2},491546] \cos(165^\circ 58' 27'' - 15'', 318t) + [8,077030] t \sin(165^\circ 51' - 15'', 318t) \\ &\quad + [1,118264] \cos(172^\circ 1' 53'' + 0'', 858t) - [4,318485] \cos(165^\circ 51' - 31'', 494t) \\ &\quad - [3,013009] \cos(165^\circ 51' - 47'', 670t) + [\bar{2},359431] + t. p., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= 351^\circ 40' - 0'', 247t + [2,937391] \sin(11^\circ 38' + 30'', 142t), \\ \sin i &= [\bar{2},885228] - [4,508492] \cos(17^\circ 44' + 30'', 636t). \end{aligned}$$

Dans les expressions de λ et de h , les coefficients dont on donne les logarithmes sont exprimés en secondes d'arc.

Dans le Tableau suivant, nous transcrivons les coefficients numériques des perturbations périodiques de a , λ , e , $g+h$; nous verrons plus loin pourquoi celles de h et de i ont été négligées.

δ, a est exprimé à l'aide de l'unité ordinaire de longueur et δ, l , δ, e , $e, \delta \varpi$, en secondes d'arc :

Arguments.	$\delta, a.$	$\delta, \lambda.$
$\lambda' - \lambda$	[4,946960]	[2,575528]
$2(\lambda' - \lambda)$	[3,415375]	[2,654461]
$3(\lambda' - \lambda)$	[3,132690]	[2,271177]
$4(\lambda' - \lambda)$	[4,869429]	[1,946658]
$5(\lambda' - \lambda)$	[4,617493]	[1,653062]

Arguments.	$\delta, \alpha.$	$\delta, \lambda.$	$\delta, e.$	$e\delta, \varpi.$
$\lambda - \varpi \dots\dots\dots$	$[3,097728]_n e$	$[2,591776] e$	$[1,603002]_n \frac{1}{\cos \psi}$	$[1,603002]_n \frac{1}{\cos \psi}$
$\lambda' - \varpi \dots\dots\dots$		$[2,842803] \text{ »}$	$[1,929874]_n \text{ »}$	$[1,929874]_n \text{ »}$
$3\lambda' - 2\lambda - \varpi \dots\dots$	$[2,090637]_n \text{ »}$	$[3,563032]_n \text{ »}$	$[2,294881] \text{ »}$	$[2,294881] \text{ »}$
$4\lambda' - 3\lambda - \varpi \dots\dots$	$[3,832240]_n \text{ »}$	$[3,113601]_n \text{ »}$	$[1,860393] \text{ »}$	$[1,860393] \text{ »}$
$5\lambda' - 4\lambda - \varpi \dots\dots$	$[3,626134]_n \text{ »}$	$[2,808150]_n \text{ »}$	$[1,529348] \text{ »}$	$[1,529348] \text{ »}$
$\lambda' - \varpi' \dots\dots\dots$		$[1,540278]_n$		
$3\lambda' - 2\lambda - \varpi' \dots\dots$	$[4,952756]$	$[2,375808]$		
$4\lambda' - 3\lambda - \varpi' \dots\dots$	$[4,702800]$	$[1,932833]$		
$5\lambda' - 4\lambda - \varpi' \dots\dots$	$[4,501389]$	$[1,635133]$		
$3\lambda' - \lambda - 2\varpi \dots\dots$			$[2,904378] \frac{e}{\cos \psi}$	$[2,904378] \frac{e}{\cos \psi}$
$5\lambda' - 3\lambda - 2\varpi \dots\dots$	$[2,456231] e^2$	$[3,926174] e^2$	$[2,785414]_n \text{ »}$	$[2,785414]_n \text{ »}$
$3\lambda' - \lambda - \varpi - \varpi'$			$[1,746783]_n \frac{1}{\cos \psi}$	$[1,746783]_n \frac{1}{\cos \psi}$
$5\lambda' - 3\lambda - \varpi - \varpi'$	$[3,621643]_n e$	$[3,059281]_n e$	$[1,649796] \text{ »}$	$[1,649796] \text{ »}$

C'est la comparaison de ces formules et des observations qui nous a conduit à la plus petite erreur moyenne; les différences ainsi obtenues (O — C) sont inscrites dans une des colonnes du Tableau suivant, au sujet duquel nous allons fournir quelques indications.

Quand nous sommes arrivé à la recherche des accroissements $\delta A, \delta B, \delta B', \dots$, il nous a paru plus simple de considérer $\frac{\delta B'}{B'}, \frac{\delta B}{B}$, de façon à prendre, dans les expressions précédentes, non les coefficients de B et de B', mais les termes en B, B'; quant aux termes en B², on les obtient avec assez de précision en multipliant par

$$[0,556482]$$

les coefficients des termes correspondants, en A.

Les valeurs de B et de B' qui ont servi dans ces calculs ont pour logarithmes

$$B = [2,9957],$$

$$B' = [2,02].$$

Tous les coefficients de $\delta A, \delta B, \delta B', \delta C, \delta J, \delta t, \delta n$ sont donnés eux-mêmes et non leurs logarithmes.

Pour le calcul des ascensions droites, on n'a pas tenu compte des variations du nœud et de l'inclinaison; ces deux dernières ont été seules employées pour le calcul des déclinaisons.

$\frac{\delta A}{10'}$	$\frac{\delta C}{10'}$	$\frac{\delta J}{10'}$	$\frac{\delta B'}{B'10'}$	$\frac{\delta B}{B10'}$	$\frac{\delta t}{10'}$	$\delta n.$	
21799	-16847	+12749	+ 1608	-22060	+48491	-13763	+15 = 0
12131	-10806	+12742	+44531	-16361	+30817	- 7832	+15 = 0
16181	-16182	+14207	+13665	-49901	+48233	-10741	-18 = 0
16687	-16452	+12769	+13467	- 6008	+47204	-11256	- 4 = 0
13180	-13407	+14190	+45812	+ 2465	+39096	- 8934	- 9 = 0
8961	- 9586	+12614	+58933	-18082	+30069	- 5923	- 5 = 0
9861	-12180	+13932	+38049	-42618	+37751	- 6524	+ 9 = 0
12813	-17018	+13592	+12315	-35325	+49711	- 8792	+ 5 = 0
12119	-16442	+13687	+25913	+ 7300	+47523	- 8926	-13 = 0
8002	-15977	+12017	+11805	-15515	+46024	- 5914	0 = 0
4715	-10321	+13063	+51877	+ 2115	+32145	- 3575	- 9 = 0
3364	-10244	+13035	+48440	-17083	+32105	- 2640	+15 = 0
3624	-17288	+12965	+16516	+ 2875	+49684	- 3913	+ 9 = 0
1458	- 9419	+12399	+55908	+ 951	+29670	- 1543	-12 = 0

Les équations qui définissent δh et δi , en fonction des différences (O — C), entre l'observation et le calcul, sont :

$\delta h.$	$\delta i.$	
+0,1011	-0,338	-1. 5 = 0
-0,0952	-0,255	+1. 18 = 0
+0,0577	+1,237	+0. 9 = 0
+0,0888	-0,779	+1. 23 = 0
-0,0518	-1,245	-0. 27 = 0
-0,0960	-0,023	-1. 15 = 0
-0,0483	+1,217	-0. 4 = 0
+0,0873	+0,838	-0. 28 = 0
+0,0547	-1,231	+1. 48 = 0
+0,0949	+0,388	-0. 13 = 0
-0,0855	-0,669	-1. 28 = 0
-0,0851	+0,642	+1. 25 = 0
+0,1029	-0,317	-0. 54 = 0
-0,0889	-0,373	-1. 27 = 0

Nous donnons encore les éléments d'Hécube pour les dates des observations dont nous avons fait usage. Dans la colonne des dates, nous nous contentons de transcrire l'année. Ces éléments sont rapportés à l'équinoxe moyen de 1850,0.

Le Tableau suivant contient aussi les ascensions droites et les déclinaisons observées et calculées, ainsi que leurs différences (O — C); ces coordonnées sont rapportées à l'équinoxe moyen du 1^{er} janvier de l'année d'observation.

Dates.	Log. α .	Long. moy.	Long. périh.	Anom. moy.	Excent.	Ascensions droites		O—C.
						observées.	calculées.	
1869.	0,507093	184°.17'.45"	173°.36'.54"	10°.40'.51"	5°.43'.36"	12. 3.12 ^{h m s}	12. 3.27 ^{h m s}	—15
1871.	0,506805	336.56.23	173.34.33	163.21.50	5.49. 6	22.30.36	22.30.51	—15
1874.	0,506629	122.30.31	173.38.51	— 51. 8.20	5.49.42	7.47.48	7 47.30	+18
1875.	0,507095	200.27. 7	173. 9.24	27.17.43	5.53. 4	13.44.16	13.44.12	+ 4
1876.	0,506389	279.10.53	172. 4.31	107. 6.22	5.54.28	19.27.44	19.27.35	+ 9
1877.	0,506383	350.29.41	171.36.44	178.52.57	5.52.34	23.42.43	23.42.38	+ 5
1878.	0,506559	65.53.30	171.35.20	—105.41.50	5.51.33	3.28. 4	3.28.13	— 9
1880.	0,506737	141.39.38	171.18.49	— 29.39.11	5.52. 9	9.23.59	9.24. 4	— 5
1881.	0,506795	222.40.14	170.58.58	51.41.16	5.53.44	15. 3.51	15. 3.38	+13
1886.	0,506681	157.19. 7	170.36.46	— 13.17.39	5.59.32	11.10. 4	11.10. 4	0
1888.	0,506126	314.13.24	169.11.57	145. 1.27	5.58.15	21.52.22	21.52.13	+ 9
1889.	0,506373	29.19.40	169.16. 8	—139.56.28	5.56.53	1.19.57	1.20.12	—15
1892.	0,506641	182. 6.28	168.36.35	13.29.53	5.56.14	12.20.43	12.20.52	— 9
1894.	0,506342	330.45.12	168. 3.32	162.41.40	5.58. 5	22.55.15	22.55. 3	+12

Dates.	Long. nœud.	Inclin.	Déclinaisons		O—C.
			observées.	calculées.	
1869.	352°. 8'.45"	4°.23'.50"	— 2°.10'.27"	— 2°.11'.32"	+1'. 5"
1871.	352. 5.41	4.23.42	—10.44.43	—10.43.25	—1.18
1874.	352. 2.57	4.23.35	26.50.40	26.50.49	—0. 9
1875.	352. 1.34	4.23.31	—14.50.51	—14.49.28	—1.23
1876.	352. 0.13	4.23.28	—27.33.36	—27.34. 3	+0.27
1877.	351.59. 3	4.23.25	— 2. 0.33	— 2. 1.48	+1.15
1878.	351.57.52	4.23.22	24.38. 1	24.37.57	+0. 4
1880.	351.56.43	4.23.19	19.25.55	19.25.27	+0.28
1881.	351.55.32	4.23.16	—23.17.46	—23.15.58	—1.48
1886.	351.51.33	4.23. 9	7.26. 5	7.25.52	+0.13
1888.	351.49.35	4.23. 7	—16.18.30	—16.19.58	+1.28
1889.	351.48.41	4.23. 6	11.48.36	11.50. 1	—1.25
1892.	351.46.53	4.23. 5	— 3.56.43	— 3.57.37	+0.54
1894.	351.45. 8	4.23. 7	— 8.52.40	— 8.54. 7	+1.27

CHAPITRE III.

1. RECHERCHES SUPPLÉMENTAIRES. — Pour voir si, dans les calculs compliqués qui ont donné $e_1, e_2, e_3, \theta_0, \dots, \theta_3, g_0, \dots, g_3$, nous n'avions omis aucun terme sensible ou si l'introduction d'un terme nouveau ne pouvait être utile, nous avons cherché empiriquement l'influence de certains changements dans nos formules.

C'est, en effet, cette méthode qui nous a conduit plus haut à compléter les expressions de e et de θ , en tenant compte des termes

$$\begin{aligned} e_3 \cos 3\theta_0(t+c), \\ \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c), \end{aligned}$$

et, par suite, à introduire, dans les formules qui définissent η et ξ , le terme

$$e_3 \frac{\sin}{\cos} [J - (3\theta_0 - g_0)t].$$

Nous rappelons que l'addition de ce nouveau terme, dans les équations du mouvement, avait diminué de moitié la somme des valeurs absolues des résidus.

Nous allons rapidement énumérer les recherches faites dans ce sens. Elles étaient d'autant plus nécessaires qu'après avoir négligé e^3 et e'^2 , tout en conservant des termes en m'^2 , il était assez pénible de distinguer, parmi les divers termes, ceux qu'il fallait conserver, soit parce qu'ils étaient importants, soit parce qu'ils ne se détruisaient pas avec d'autres termes supprimés *a priori*.

(A). Si l'on tient compte, dans la fonction perturbatrice, du terme à longue période en e'^2 , il en résulte, dans η et ξ , une expression de la forme :

$$C_1 \frac{\sin}{\cos} [J - (\theta_0 - g_0)t - 2g' - 2h'].$$

Si l'on multiplie, par $15 \times \sin 1'' \times \cos \delta$, les résidus (O - C) relatifs aux ascensions droites et qu'on calcule empiriquement C_2 , cette quantité est égale à une fraction dont le numérateur est

$$-0,00560 + 0,00431.$$

Avec le petit terme ainsi obtenu, nous avons trouvé des résidus comparables à ceux que nous avons déjà; nous l'avons, par suite, négligé.

(B). Les calculs montrent que le même terme de la fonction perturbatrice, dont nous venons de parler, donne lieu, pour η et ξ , à une expression de la forme

$$C_3 \frac{\sin}{\cos} (2g' + 2h');$$

on trouve

$$C_3 = C_2,$$

nous avons donc supposé que C_3 était nul.

(C). Nous avons fait abstraction plus haut de la partie de e_3 qui est indépendante de e_0 et qui est du second ordre en m' , à savoir :

$$-\frac{1}{3} \alpha_2 \alpha_3;$$

cela revient à négliger, dans η et ξ , le terme

$$-\frac{A}{3} \frac{\partial(\alpha_2 \alpha_3)}{\partial G_0} \frac{\sin}{\cos} [J - (3\theta_0 - g_0)t];$$

pour voir si nous devons en tenir compte, nous avons calculé la valeur de δe_3 qui conduisait à la meilleure représentation des observations, et nous avons obtenu, pour le numérateur de δe_3 ,

$$+ 0,00499 - 0,00492;$$

il n'y a donc rien à changer au terme en e_3 .

(D). Nous avons eu recours également au terme

$$e_4 \frac{\sin}{\cos} [J - (4\theta_0 - g_0)t],$$

que renfermeraient η et ξ , si l'on développait davantage les formules écrites plus haut; le numérateur de e_4 ,

$$+ 0,00533 - 0,00458,$$

indique qu'on peut négliger e_4 .

(E). Parmi les divers coefficients qu'on rencontre dans les expressions de L , λ , η , ξ , quelques-uns ont souvent varié, d'une quantité notable, avec les diverses approximations; tels sont ceux de A et de B^2 dans la somme

$$S = e_{11} \sqrt{G_0} + A \frac{\partial (e_{11} \sqrt{G_0})}{\partial G_0} + e_{12} \sqrt{G_0} B^2;$$

pour savoir si la dernière valeur adoptée était suffisamment précise, nous avons introduit un coefficient δS et trouvé pour le numérateur de δS

$$- 0,00579 + 0,00412;$$

en tenant compte de δS , on ne diminuait ni la moyenne des résidus, ni les écarts extrêmes.

(F). De même, e_{21} a varié, pendant nos recherches, parfois du simple au double; il était naturel de considérer un coefficient δe_{21} ; on a obtenu

$$\delta e_{21} = \delta S;$$

nous avons donc conservé la dernière valeur calculée pour e_{21} .

(G). Nous avons négligé des perturbations périodiques contenant des arguments

$$in' - (i - 1)n$$

et

$$in' - (i - 2)n,$$

qui, pour des valeurs simples de i , sont voisins de $\pm n'$ ou de $\pm 2n'$; il nous a donc paru utile d'introduire, dans l'expression de la longitude moyenne, un terme de la forme

$$A \sin(\lambda' + bt) + B \cos(\lambda' + bt)$$

ou

$$A \sin(\lambda + bt) + B \cos(\lambda + bt).$$

Pour calculer b , nous avons développé les sin et cos précédents par rapport à t , ce qui est permis si b est assez petit, et nous avons ainsi remplacé les expressions précédentes par

$$A \sin \lambda' + B \cos \lambda' + A bt \cos \lambda' - B bt \sin \lambda'$$

ou

$$A \sin \lambda + B \cos \lambda + A bt \cos \lambda - B bt \sin \lambda;$$

les valeurs obtenues pour A, B, b nous ont conduit à des résidus peu différents de ceux que nous avons déjà.

(H). Si l'on construit la courbe des résidus en ascension droite et qu'on la compare à une sinusôide, on peut admettre que, de 1874 à 1889, cette sinusôide est parcourue 2 fois $\frac{1}{2}$ ou 3 fois $\frac{1}{2}$. En introduisant, dans la longitude moyenne, un terme empirique dont la période était de 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 ans, nous sommes toujours arrivé à des résultats négatifs.

(I). Il en a été de même en cherchant à faire varier g_0 . Cette vérification était utile en raison des simplifications faites dans l'expression algébrique de g_0 , et de la grande différence des valeurs qu'on avait obtenues pour g_0 , successivement en négligeant, puis en conservant le terme en m'^2 .

(J). En raison de l'importance des coefficients e_{12} , θ_{22} , θ_{11} , e_{32} , qui varient beaucoup suivant qu'on s'arrête aux termes du premier ordre en m' ou à ceux du second, on peut se demander si l'on n'aurait pas dû conserver dans les équations (20) du Chapitre I certains d'entre eux qui sont du troisième ordre en m' ; on trouve qu'il faut dans ce cas ajouter, dans les équations (23) du même Chapitre,

$$\begin{aligned} & + \frac{\alpha_2}{8} \theta_{11}^2 \text{ au premier membre de la 2}^\circ \text{ équation,} \\ & - \frac{3\alpha_2}{8} \theta_{11}^2 \text{ " " 4}^\circ \text{ " ,} \\ & - 2\alpha_3 \theta_{11}^2 \text{ " " 5}^\circ \text{ " ;} \end{aligned}$$

dans le calcul de g_{11} , g_{22} , e_{32} , e_{21} , e_4 , on a aussi à tenir compte des variations :

$$\begin{aligned} \delta g_{11} &= \frac{3\alpha_2}{8} \theta_{11}^2, & \delta e_{21} &= -\frac{\alpha_3 e_{11}}{2} (\theta_{11} - e_{12}), \\ \delta g_{22} &= -\alpha_3 \theta_{11}^2, & e_4 = e_{41} e_0 &= -\frac{\alpha_3 e_{11}}{2} (\theta_{11} - e_{12}) e_0, \\ \delta e_{32} &= -\frac{\alpha_2}{24} \theta_{11}^2. \end{aligned}$$

Il en est résulté pour e_{ik} , θ_{ik} , g_{ik} , les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} e_{11} &= [\bar{2}, 362960], & g_{11} &= [0, 092488], \\ e_{12} &= [0, 053548]_n, & g_{22} &= [\bar{1}, 856867]_n, \\ e_{21} &= [\bar{3}, 454363]_n, & \theta_{11} - g_{11} &= [0, 439413], \\ \theta_{22} &= [0, 134324]_n, & \theta_{22} - g_{22} &= [\bar{1}, 808367]_n, \\ \theta_{11} &= [0, 600738], & e_{32} &= [\bar{1}, 010429]_n, \\ & & e_{41} &= [\bar{3}, 324726]_n. \end{aligned}$$

Pour déterminer les éléments de l'orbite, on ne se sert pas de θ_{11} , g_{11} , θ_{22} , g_{22} , mais des différences $\theta_{11} - g_{11}$, $\theta_{22} - g_{22}$. Ces dernières quantités et toutes celles qui entrent dans les expressions de L , λ , η , ξ , diffèrent peu de celles qui nous ont servi plus haut.

En employant les coefficients du Tableau précédent et en conservant les termes en B'^2 , on n'est pas arrivé à des résultats différents de ceux qui sont donnés ci-dessus.

Nous croyons donc pouvoir conclure des recherches précédentes que la grandeur de nos résidus ne doit pas être attribuée aux seuls termes périodiques négligés, ni aux termes en e'^2 , mais qu'elle provient uniquement du degré d'approximation auquel nous nous sommes arrêté dans le développement des formules du Chapitre I.

2. DÉTERMINATION DE LA MASSE DE JUPITER. — Sur les conseils de M. Perrotin, nous avons cherché quelle était la valeur de la masse qui nous conduisait à la meilleure représentation des observations.

Si l'on considère, dans les formules qui définissent L , λ , η , ξ , les termes les plus importants, c'est-à-dire ceux qui contiennent B en facteur, on voit que, dans les expressions de L et de λ , ils sont proportionnels à m' , tandis que, dans celles de η et de ξ , m' n'est pas en facteur. Étant donnée l'importance des perturbations calculées plus haut, on pouvait espérer avoir ainsi une bonne détermination de m' .

Au lieu de supposer que la valeur adoptée jusqu'alors pour la masse était exacte, nous avons traité m' comme A , B , B' , C , J et calculé $\delta m'$. En introduisant, dans les équations différentielles, $\delta m'$ ou plutôt $\frac{\delta m'}{m'}$, nous avons obtenu les nombres suivants :

— 0,31716 $\frac{\delta m'}{m'}$		— 0,22843 $\frac{\delta m'}{m'}$
— 0,11823 »		— 0,11747 »
— 0,30210 »		— 0,11673 »
— 0,20853 »		— 0,01522 »
— 0,11678 »		— 0,05672 »
— 0,10590 »		— 0,01266 »
— 0,18234 »		+ 0,01554 »

La somme des valeurs absolues de ces coefficients est

$$1,91381.$$

Dans les équations qui définissent δA , δB , $\delta B'$, δC , δJ , $\delta m'$, en fonction des résidus ($O - C$) relatifs aux ascensions droites, nous avons exprimé les cinq pre-

mières inconnues en fonction de $\delta m'$ et des quantités connues. Dans ces relations, les termes indépendants de $\delta m'$ étaient à peu près nuls, comme on devait s'y attendre, puisque, en négligeant $\delta m'$, on n'avait plus à faire varier les valeurs de A, B, B', C, J, adoptées dans la dernière approximation. Dans les quatorze équations qui devaient nous donner $\delta m'$, les termes connus n'étaient donc autres que les résidus (O — C), et la somme des nouveaux coefficients de $\frac{\delta m'}{m'}$ était

$$0,13089.$$

Nous avons trouvé

$$\frac{\delta m'}{m'} = \frac{0,00497 - 0,00494}{0,13089}.$$

Les observations dont nous nous sommes servi nous conduisent donc à conserver pour m' le nombre

$$\frac{1}{1047,232}.$$

Si nous voulons nous rendre compte de l'erreur que nous pouvions commettre dans la détermination précédente de m' , supposons que les quantités (O — C) qui forment le numérateur de $\delta m'$, au lieu de s'annuler, ne se soient détruites qu'en partie. Soit p le numérateur ainsi obtenu, exprimé en secondes de temps; désignons par ε la variation correspondante pour $\frac{1}{m'}$, nous avons

$$\frac{1}{1047,232} - \frac{1}{1047,232 + \varepsilon} = \frac{p \times 15 \times \sin 1''}{0,13089 \times 1047,232},$$

d'où l'on tire, avec une exactitude suffisante,

$$\varepsilon = \frac{p \times 15 \times 1047}{0,13 \times 206205},$$

ou encore

$$\varepsilon = \frac{p}{2}.$$

Si nous admettons, par exemple, pour fixer les idées, que p est du même ordre que l'erreur moyenne de la moyenne des résidus, savoir :

$$\sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2}{m(m-1)}},$$

où $\Sigma \varepsilon^2$ est la somme des carrés des résidus et m le nombre des observations, nous voyons que p est à peu près 3 et, par suite, ε voisin de $\frac{3}{2}$; nous pou-

vons donc dire que, à l'aide de nos formules approchées et du petit nombre d'observations dont nous disposons, nous obtenons $\frac{1}{m'}$ à quelques unités près.

3. PERTURBATIONS PÉRIODIQUES DU NOEUD ET DE L'INCLINAISON. — Jusqu'ici nous nous sommes spécialement occupé de la détermination des ascensions droites. Disons un mot des perturbations, à courte période, de h et de i . Nous les avons calculées à l'aide des formules du t. I de la *Mécanique céleste* de M. Tisserand (p. 169); pour effectuer les intégrations, nous avons supposé, dans la fonction perturbatrice, h et i constants; nous avons contrôlé les résultats ainsi obtenus en employant les équations canoniques qui ont donné plus haut h et i ; nous avons trouvé, pour h , par exemple, des perturbations de quelques minutes d'arc; elles n'ont produit aucun changement sensible dans la représentation des observations de déclinaison. Nous avons alors tenu compte du terme le plus important de la fonction perturbatrice contenant à la fois e et η^2 , à savoir

$$\frac{1}{2} e \eta^2 (4 E^2 + E_1^2) \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi),$$

bien que dans les recherches précédentes nous ayons constamment négligé e^2 ; le terme ci-dessus a donné lieu à une perturbation de $47'$ dont la période est de 230 ans environ; l'introduction de ce terme, dans les seules équations qui définissent h et i , n'a fait qu'augmenter les résidus en déclinaison. Nous nous sommes donc contenté des expressions de h et de i du Chapitre I.

4. COMPARAISON DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AVEC CEUX DE M. HARZER. — Nous ne pouvons complètement comparer les formules données plus haut avec celles de M. Harzer, si différentes des nôtres. Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

A la page 149 du Mémoire de M. Harzer, nous lisons

$$\log a = 0,50679;$$

de notre côté, nous avons trouvé

$$\log a = 508220.$$

A la page 151 du même Mémoire, la formule qui donne l'expression du temps en fonction de la longitude peut s'écrire, si l'on se borne au terme le plus important,

$$[\bar{1}, 23163] t = - [2,07019] \frac{2q}{1+q^2} \sin \left[(\delta + \epsilon) \nu + 2 \frac{\pi}{2K} G + 2\mathcal{F} \right];$$

le coefficient de ce sin est $16^\circ, 148$ (voir p. 153); la partie principale de l'argu-

ment est $(\delta + \zeta)v$; si l'on se reporte à la p. 144, on voit que :

$$\log(\delta + \zeta) = \bar{2},42172.$$

Si l'on remplace dans l'expression de t , transcrite ci-dessus, v par $[\bar{1},23163]t$, puis les logarithmes par les nombres, et qu'au lieu de prendre le degré pour unité, on choisisse la seconde d'arc, on a

$$613'',66t = [4,76442] \sin(16'',205t + \text{const.}).$$

Nous retrouvons ainsi, à très peu près, le coefficient $613'',6536$ du temps, dans notre expression de λ ; la perturbation principale de λ ,

$$[4,745251] \sin(6''10'53'' + 16'',176t),$$

diffère peu du terme à longue période de M. Harzer dont nous n'avons pris que la partie la plus importante afin de pouvoir établir ces comparaisons, sans compliquer les calculs.

Enfin M. Harzer donne, pour le mouvement ζ des apsides,

$$\log \zeta = \bar{3},11922;$$

dans ses formules, ζ est coefficient de la longitude; nous devons donc comparer entre elles les deux quantités ζn et g_0 ; un calcul simple donne

$$\zeta n = 0'',808,$$

tandis que nous avons trouvé plus haut

$$g_0 = 0'',858.$$

Remarquons encore que le rapport des deux termes dont se compose ζ est $\frac{68}{32}$; pour g_0 , nous avons obtenu $\frac{70}{30}$; dans chacun des cas, c'est le terme du deuxième ordre par rapport à la masse qui est le plus important, et non le terme du premier ordre, comme on pourrait le croire *a priori*.

Termes séculaires. — Nous avons dit, au début de ce Travail, que M. Harzer avait évité les termes séculaires; de notre côté, nous n'avons pas cherché à en débarrasser nos formules; les expressions (38) de η et de ξ contiennent un tel terme :

$$\left[A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3B^2}{2G_0^2} \right] e_{11} \sqrt{G_0} t \frac{\cos}{\sin} [J - (\theta_0 - g_0)t].$$

Tout d'abord, nous n'avons pas tenu compte de B^2 et, dans ces conditions, nous avons trouvé, dans la dernière approximation, que le coefficient placé ci-dessus entre crochets avait pour valeur numérique

$$[5,078987].$$

Avec les formules complètes, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} &= [5,622914]_n, \\ 3 \frac{B^2}{2G_0^2} &= [5,626893, \\ \hline A \frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3B^2}{2G_0^2} &= [7,587]. \end{aligned}$$

On voit donc qu'en conservant B^2 , on diminue considérablement l'importance de ce terme séculaire, à tel point qu'on peut admettre qu'une approximation nouvelle le ferait disparaître. Nous allons voir que, même pour des époques très éloignées, il ne joue pas un grand rôle et que nos formules donnent des résultats assez concordants avec ceux de M. Harzer.

5. ÉLÉMENTS OSCULATEURS DE 1897 A 2147. — Les arguments $(\theta_0 - g_0)t$ et $\theta_0 t$ ont pour périodes respectives 232 et 220 ans environ; calculons donc, de 25 en 25 ans, pour la période comprise entre 1897 et 2147, septembre 23,5, temps moyen de Paris, les éléments a , λ , e , $g + h$, h , i et la valeur osculatrice du moyen mouvement $\frac{d\lambda}{dt}$, rapportés à l'équinoxe moyen de 1850,0. Nous ne tenons pas compte des perturbations à courte période.

Dates.	Log. a .	n .	λ .	Diff.	φ .	$g + h$.	h .	i .
1897...	0,506430	617,6079	166. 1.42"	125.39. 7	5.58.36"	167.27. 6"	351.42.58"	4.23. 8"
1922...	0,506964	616,4717	291.40.49	120.50.22	5.44.17	161.44.40	351.17.10	4.24.19
1947...	0,508116	614,0979	52.31.11	114. 4.37	4.58.13	157. 8.52	350.28.46	4.25.18
1972...	0,509314	611,2391	166.35.48	107.45.22	3.57.24	160.10.36	349.34.20	4.24.34
1997...	0,509970	609,5271	274.21.10	106.14. 8	3.22. 7	174.19. 6	348.59.41	4.23.15
2022...	0,509756	610,1155	20.35.18	110.22. 8	3.32.35	191.15.17	348.40.16	4.23.26
2047...	0,508780	612,5816	130.57.26	117.32.38	4.22.28	200.42.19	348. 8.18	4.24.49
2072...	0,507526	615,3572	248.30. 4	123.17.47	5.20.57	199.37. 2	347.15. 7	4.25.14
2097...	0,506616	617,1011	11.47.51	125.37.58	5.51.15	193.50. 2	346.24.38	4.24. 1
2122...	0,506504	617,3035	137.25.49	124.17.48	5.51.56	188. 1. 1	345.56.35	4.23. 5
2147...	0,507240	615,9284	261.43.37		5.28.20	182.28.55	345.36.21	4.23.54

Ce Tableau montre que, pendant plus de 200 ans, nos formules indiquent

une libration dans les éléments d'Hécube autres que la longitude du nœud ascendant; de ces mêmes formules, on conclut que $\log a$ est compris entre

$$0,506070 \text{ et } 0,510366,$$

et que n peut varier de

$$608^{\circ},6915 \text{ à } 618^{\circ},6157.$$

De 1837 à 2147, $(\theta_0 - g_0)t$ et $\theta_0 t$ augmentent de 360° environ, tandis que $g_0 t$ n'augmente que de 20° . Pour voir ce que donneront nos formules pour des périodes plus éloignées, considérons, à partir de 1897 sept. 23,5, un certain nombre de périodes égales à $\frac{2\pi}{\theta_0 - g_0}$, de façon que $g_0 t$ croisse de 0° à 360° ; nous obtenons le Tableau suivant, dans lequel il est inutile de parler des éléments a, λ, n, i , dont les variations seraient analogues à celles du Tableau précédent.

6. ÉLÉMENTS OSCULATEURS D'HÉCUBE : $e, g + h, h$, pour les époques;

$$1897. \text{ septembre } 23,5, \text{ t. m. de Paris } + m \times \frac{2\pi}{\theta_0 - g_0}.$$

$$\left(\frac{2\pi}{\theta_0 - g_0} \text{ est environ } 232 \text{ ans et } 18 \times \frac{2\pi}{\theta_0 - g_0} \text{ à peu près } 4170 \text{ ans} \right).$$

m .	φ .	$g + h$.	h .	m .	φ .	$g + h$.	h .
0	5.58.36"	167.27.6"	351.42.58"	10	5.43.48"	23.4.18"	293.48.13"
1	5.48.20	186.31.12	345.57.32	11	6.3.3	42.27.52	287.57.49
2	5.36.15	205.55.57	340.11.50	12	6.21.40	60.58.43	282.7.2
3	5.21.32	225.55.8	334.25.48	13	6.37.43	78.32.1	276.15.53
4	5.5.11	247.3.1	328.39.20	14	6.47.47	95.13.59	270.24.38
5	4.51.24	269.49.44	322.52.15	15	6.48.15	118.28.5	264.33.18
6	4.45.51	293.58.13	317.4.40	16	6.38.30	127.48.27	258.42.3
7	4.51.25	318.12.21	311.16.29	17	6.20.8	144.48.15	252.50.58
8	5.5.51	341.15.28	305.27.44	18	5.56.36	162.49.18	246.59.57
9	5.24.25	4.46.24	299.38.21				

Si nous comparons les résultats de ces deux Tableaux avec ceux que donne M. Harzer dans son Mémoire (p. 155), nous trouvons, d'après M. Harzer, pour $\log a$ des nombres compris entre

$$0,50574 \text{ et } 0,51026;$$

les limites données par nous sont voisines de ces nombres qui ne représentent pas le minimum et le maximum que peut atteindre $\log a$.

Les valeurs de φ données par M. Harzer varient de $3^{\circ} 18' 49''$ à $8^{\circ} 31' 20''$; ici la comparaison est plus difficile, en raison de la grande variation de φ pendant chacune des périodes de 25 et de 232 ans; nous avons vérifié qu'en augmentant de 25 ans les dates du dernier Tableau, et comparant les nouvelles déterminations de φ aux précédentes, on avait des différences variant périodiquement de -1° à $+1^{\circ}$ environ. Les limites extrêmes de φ données par nos formules sont donc comparables à celles que nous avons indiquées plus haut ($3^{\circ} 19'$ et $8^{\circ} 31'$).

La dernière longitude du périhélie de M. Harzer,

$$107^{\circ} 15',$$

correspond à peu près à l'époque $1897 + 3800$ ans; le dernier Tableau donne, pour ce moment, 131° environ; les deux variations ainsi obtenues pour le périhélie diffèrent de $\frac{1}{14}$ de leur valeur; nous avons vu plus haut que M. Harzer avait adopté $0'', 808$ et nous $0'', 858$ pour le mouvement séculaire des apsides.

Le rapport de ces deux nombres est précisément $\frac{15}{16}$, nombre voisin de $1 - \frac{1}{16}$.

Les variations du moyen mouvement concordent beaucoup mieux; à ce sujet nous ferons remarquer que les différences des longitudes comptées de 25 en 25 ans varient elles-mêmes de 106° à 125° .

Nous arrivons enfin à la variation de la longitude du nœud ascendant; à $224^{\circ} 54'$ donné par M. Harzer, correspond, d'après le Tableau précédent, le nombre 258° environ; pour une diminution de 91° , nous avons deux résultats différents de 35° ; de même pour i (j dans le Mémoire de M. Harzer), les conclusions ne concordent pas.

Si l'on tient compte, dans le développement de la fonction perturbatrice, des termes qui contiennent $\gamma\gamma'$, on doit considérer la somme

$$\gamma\gamma' B^1 \cos(h - h') - \gamma\gamma' B^3 \cos(2\lambda + h - 4\lambda' + h');$$

il en résulte pour γ et h les accroissements $\delta\gamma$, δh ainsi définis :

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= - [3,396483] \cos(h - h') - [1,012961] \cos(2\lambda + h - 4\lambda' + h'), \\ \gamma\delta h &= - [3,396483] \sin(h - h') - [1,012961] \sin(2\lambda + h - 4\lambda' + h'). \end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations, nous nous sommes servi de la valeur obtenue plus haut pour h , et nous avons continué à supposer h' constant. Si l'on détermine les constantes de h et de i , de façon qu'en 1897 h et i aient les mêmes expressions que plus haut, on arrive aux résultats ci-dessous :

<i>m.</i>	<i>h.</i>	<i>i.</i>		<i>m.</i>	<i>h.</i>	<i>i.</i>
0	351.42.58	4.23. 8		10	281.14.47	3.28. 3
1	345.22.32	4.15.55		11	273.36.41	3.26.17
2	338.48.56	4. 8.19		12	265.56. 7	3.25.24
3	332.16.22	4. 1.17		13	258.14.34	3.25.24
4	325.13.32	3.54.37		14	250.33.27	3.26.11
5	318.11.46	3.48.31		15	242.53.34	3.27.52
6	311. 1.57	3.43. 1		16	235.16.55	3.30.24
7	303.44. 4	3.38. 9		17	227.43.10	3.33.46
8	296.19.58	3.34. 0		18	220.40. 0	3.37.50
9	288.49.48	3.30.38				

Ces derniers nombres concordent mieux avec ceux de M. Harzer. N'oublions pas, d'ailleurs, qu'il a tenu compte des perturbations séculaires des nœuds des grosses planètes, d'après les formules de Le Verrier, tandis que nous les avons négligées.

En résumé, ces Tableaux nous montrent que, d'après nos formules, les éléments a , n , e , i , sont sujets à d'importantes libérations; $g + h$ et h ont des libérations et des variations séculaires.

7. VARIATIONS DE LA GRANDEUR D'HÉCUBE. — Aux grandes variations de e correspondent, dans l'éclat d'Hécube, des changements que nous allons rapidement étudier.

L'expression de la grandeur d'un astéroïde est, en désignant par g une constante que donnent les observations,

$$g + 5 \log r \Delta;$$

r est le rayon vecteur de l'astre, Δ sa distance à la Terre.

Au lieu de cette expression, contentons-nous de la suivante, qui est un peu plus simple,

$$g + 5 \log r(r - 1).$$

$r(r - 1)$ varie peu si l'on ne considère que les changements de a ; supposons a constant et prenons

$$\log a = 0,508.$$

Considérons les valeurs extrêmes de φ : $3^{\circ}30'$ et $8^{\circ}30'$ et calculons, dans chacun de ces cas, les grandeurs minima et maxima d'Hécube. Dans le cas actuel, $g = 7,4$:

Pour $\varphi = 3^{\circ}30'$ l'éclat d'Hécube varie de 11,3 à 12,0, c'est-à-dire de 0,7

Pour $\varphi = 8^{\circ}30'$ » » 10,8 à 12,4, c'est-à-dire de 1,6

Il résulte de là que, s'il existe une planète du type d'Hécube dont l'excentricité moyenne soit beaucoup plus grande que dans le cas de (108), cet astéroïde peut être invisible dans les instruments ordinaires d'observation, au moment où l'excentricité est minima, et devenir visible quand l'excentricité est maxima, et qu'il est près du périhélie. Cette dernière circonstance se présentera nécessairement, puisque, entre deux oppositions, un astéroïde dont le moyen mouvement est 600" parcourt dans son orbite environ 73°.



CONCLUSION.

Les résultats obtenus ci-dessus montrent clairement que les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste permettent d'obtenir, à l'aide d'expressions particulièrement simples, une solution très approchée du problème du mouvement d'Hécube.

Nous avons, en effet, représenté, à quelques minutes d'arc près, les observations d'Hécube faites pendant vingt-cinq années, bien que la longitude moyenne ait une grande perturbation qui dépasse 15° et que nous nous soyons borné aux premières puissances des excentricités.

Les dernières recherches que nous venons de résumer nous autorisent à croire que la solution périodique, adoptée plus haut, restera longtemps encore peu différente de l'orbite réelle d'Hécube. Nous n'oublions pas toutefois que, en raison de l'importance des perturbations à longue période dont sont affectés les éléments d'Hécube, les constantes d'intégration ne peuvent être bien déterminées à l'aide des seules observations qu'on a pu faire depuis la découverte de cet astéroïde. Il en faudra de nouvelles s'étendant sur une plus longue période de temps.



ADDITION.

Tableau des éléments osculateurs de (108) Hécube, calculés par M. SCHULHOFF.

Époque, t. m. de Berlin.	Équin.	<i>l.</i>	<i>g + h.</i>	<i>h.</i>	<i>i.</i>	<i>q.</i>	<i>n.</i>	Log <i>a.</i>	Publications.
1869 Mai 15,5	1869,0	16.21.22,7	175. 4.29,6	352.19.55,9	4.24.16,3	5.45.41,9	615,96637	0,5069664	<i>Berl. Jahr.</i> 1873
1869 Avril 5,5	1869,0	10.40. 9,1	173.43. 1,2	352.20.50,2	4.24.33,2	5.46. 2,2	616,3895	0,5067783	» 1874
1871 Sept. 13,0	1871,0	163.57.28,2	173. 1.21,7	352.17.56,7	4.24.25,8	5.44.53,5	617,87880	0,5060689	» 1875
1871 Sept. 13,0	1870,0	162.58.18,5	173.49.21,7	352.17.11,9	4.24.10,3	5.46. 8,9	616,58512	0,5066757	» 1876
1875 Fév. 24,0	1880,0	19.25.35,6	173.30.42,7	352.25.31,5	4.24. 7,9	5.53.18,4	616,36986	0,5067768	» 1878
1875 Fév. 24,0	1850,0	19.24. 2	173. 7.16	352. 0.47	4.23.57	5.53.46	616,225	0,506845	(1)
1877 Sept. 16,5	1850,0	180.57.46	171.53.35	351.53.31	4.23.44	5.54.18	617,707	0,506149	(1)
1878 Nov. 17,0	1850,0	254.19.50	171.42.39	351.53.10	4.23.41	5.53.43	617,413	0,506287	(1)
1885 Déc. 28,0	1886,0	340.44.57,8	171.11. 4,5	352.23.52,0	4.23.59,8	6. 0.10,5	617,12588	0,5064218	<i>Berl. Jahr.</i> 1888
1887 Juill. 11,0	1890,0	77.36.43,6	170.14. 9,9	352.21.23,4	4.23.39,6	6. 1. 4,2	617,61288	0,5061934	» 1889
1888 Août 14,0	1890,0	146.33.51,8	169.57.59,6	352.20.33,0	4.23.40,6	6. 0.40,8	617,99535	0,5060144	» 1890
1889 Oct. 28,0	1890,0	222.14.22,8	169.50. 1,8	352.20.28,7	4.23.37,6	5.59.32,2	617,70408	0,5061508	» 1891
1891 Janv. 11,0	1890,0	297.58.42,1	169.16.49,3	352.19.53,7	4.23.36,1	5.58.52,8	617,21345	0,5063808	» 1892
1892 Oct. 12,0	1890,0	47.56. 8,5	168.58.29,2	352.19.38,6	4.23.34,3	5.59.11,2	617,05173	0,5064567	» 1894
1893 Juin 9,0	1890,0	89.12.45,6	169. 6.20,7	352.19. 2,7	4.23.34,9	5.59.22,5	617,27161	0,5063535	» 1895
1894 Oct. 2,0	1890,0	171.46.18,9	168.52.52,3	352.18. 3,2	4.23.38,0	6. 0.59,5	617,81913	0,5060968	» 1896

(1) HARZER, *Untersuchungen...*, p. 117.

Vu et approuvé :

Paris, le 30 novembre 1896,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DE PARIS,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 30 novembre 1896,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.
GRÉARD.



DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° De l'emploi du niveau et du bain de mercure dans les observations astronomiques.

2° Applications astronomiques du principe de Doppler-Fizeau.

Vu et approuvé :

Paris, le 30 novembre 1896,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 30 novembre 1896,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

